

Vorlesung Technische Mechanik I



Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe.....	5
1.1 Kräfte.....	5
1.2 Starre Körper	6
1.3 Entstehung von Kräften.....	7
1.4 Schnittprinzip	7
1.5 Dimensionen und Einheiten.....	8
2 Zentrale Kraftsysteme.....	9
2.1 Resultierende aus mehreren Kräften	9
2.2 Gleichgewicht in der Ebene	13
2.3 Gleichgewicht im Raum	18
3 Allgemeine Kraftsysteme	21
3.1 Moment eines Kräftepaars.....	21
3.2 Moment einer Kraft.....	21
3.3 Resultierende aus mehreren Momenten	22
3.4 Resultierende ebener Kraftsysteme	22
3.5 Gleichgewicht in der Ebene	25
4 Lagerreaktionen	27
4.1 Elemente von Tragwerken	27
4.2 Gelenke	28
4.3 Lagertypen.....	28
4.4 Statische Bestimmtheit einteiliger Tragwerke	28
4.5 Statische Bestimmtheit mehrteiliger Tragwerke	29
4.6 Berechnung von Lagerreaktionen.....	30
5 Fachwerke.....	39
5.1 Statische Bestimmtheit von Fachwerken	39
5.2 Aufbau eines statisch bestimmten Fachwerks	40
5.3 Ermittlung der Stabkräfte nach dem Knotenpunktverfahren	41
5.4 Ermittlung der Stabkräfte nach dem Ritterschen Schnittverfahren	44
6 Schnittgrößen	47
6.1 Definition der Schnittgrößen am Balken	47
6.2 Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößenverlauf.....	48
6.3 Funktionsverlauf der Normalkraft.....	48
6.4 Funktionsverlauf von Querkraft und Moment	50
6.5 Ermittlung der Schnittgrößen durch direkte Anwendung der Differentialgleichungen	52
6.6 Schnittgrößen an Einfeldbalken	56
6.7 Schnittgrößen an mehrteiligen Trägern	64
6.8 Schnittgrößen an Rahmen	68
7 Einführung in die Vektorrechnung.....	73
7.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	75
7.2 Addition und Subtraktion von Vektoren.....	75
7.3 Skalarprodukt	76
7.4 Vektorprodukt.....	77

Beispiele

Beispiel 2-1	Resultierende einer ebenen Kräftegruppe aus zwei Einzelkräften	9
Beispiel 2-2	Resultierende einer ebenen Kräftegruppe aus vier Einzelkräften	11
Beispiel 2-3	Berechnung der Kraft an einer Öse mit zwei belasteten Seilen	14
Beispiel 2-4	Gleichgewicht an einer durch ein Seil gehaltenen Walze	16
Beispiel 2-5	Gleichgewicht an einer räumlichen Aufhängung	19
Beispiel 3-1	Resultierende aus drei Kräften	23
Beispiel 3-2	Gleichgewicht an einer gleichseitigen Sechseckscheibe	25
Beispiel 4-1	Auflagerkräfte an einem Balken auf zwei Stützen	30
Beispiel 4-2	Auflagerkräfte an einem Kragarm	32
Beispiel 4-3	Auflager- und Gelenkkkräfte an einem zweiteiligen Tragwerk	33
Beispiel 4-4	Auflager- und Gelenkkkräfte an einer Konsolkonstruktion	35
Beispiel 5-1	Stabkräfte eines parallelgurtigen Fachwerkträgers, Knotenpunktverfahren	42
Beispiel 5-2	Stabkräfte eines parallelgurtigen Fachwerkträgers, Rittersches Schnittverfahren ..	45
Beispiel 6-1	Anwendung der Differentialgleichungen an einem Balken auf zwei Stützen	52
Beispiel 6-2	Anwendung der Differentialgleichungen an einem Kragarm	54
Beispiel 6-3	Schnittgrößen an einem Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast	56
Beispiel 6-4	Schnittgrößen an einem Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten	59
Beispiel 6-5	Schnittgrößen an einem Kragarm unter Einzelmoment und Einzellast	61
Beispiel 6-6	Schnittgrößen an einem zweiteiligen Träger	64
Beispiel 6-7	Schnittgrößen an einem Rahmentragwerk	69

Tabellenverzeichnis

Tab. 4-1	Gelenk-Symbole und ihre mechanische Bedeutung	28
Tab. 4-2	Auflager-Symbole und ihre mechanische Bedeutung	28
Tab. 6-1	Funktionsverläufe N für verteilte Belastung parallel zur Balkenachse	49
Tab. 6-2	Funktionsverläufe Q und M für verteilte Belastung quer zur Balkenachse.....	50
Tab. 6-3	Unstetigkeiten in Q und M infolge einer Einzellast quer zur Balkenachse und eines Einzelmomentes.....	51
Tab. 6-4	Ergebnisse zu Beispiel 6-1	52
Tab. 6-5	Ergebnisse zu Beispiel 6-2	55

1 Grundbegriffe

Das Fachgebiet Mechanik ist ein Teil der Physik - das älteste und am weitesten entwickelte. Viele Erkenntnisse der Mechanik liegen hunderte von Jahren, manche weit über tausend Jahre vor (z.B. durch Arbeiten von Archimedes, Galilei, Newton, Euler). Das Teilgebiet beschäftigt sich u.a. mit der Bewegung von Körpern und den damit im Zusammenhang stehenden Kräften. In der Technik ist die Mechanik daher von fundamentaler Bedeutung, vergleichbar der Bedeutung der Mathematik. Vielleicht scheiden sich daher auch Vorliebe und Ablehnung der Studenten, die sich damit beschäftigen. Manche finden es eine dröge *Quälerei*, manche tun es gern.

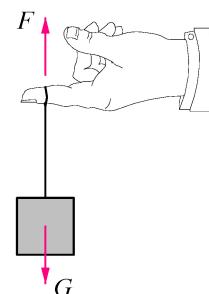
Diese Lehrveranstaltung soll eine Einführung in die Mechanik geben und den notwendigen Einstieg erleichtern. Hierbei wird der Lehrstoff wiederum auf ein Teilgebiet der Mechanik beschränkt: die Technische Mechanik und hier wiederum nur auf einen Teil, nämlich die Statik und davon nur auf einen kleinen Teil...

1.1 Kräfte

Der Begriff der Kraft ist vielfach belegt. Aus der täglichen Erfahrung kennt jeder mechanische Kräfte, z.B. Gewichtskraft (Schwerkraft), Federkraft, Bremskräfte, Beschleunigungs Kräfte, Kräfte die bei einem Anprall entstehen. Zum Erlernen der Grundbegriffe der Statik wollen wir in dieser Lehrveranstaltung nur die Kräfte an *ruhenden* Körpern betrachten, da diese Einschränkung auf die Mehrzahl der Anwendungen im Bauwesen zutrifft.

Die Kraft ist durch drei Eigenschaften bestimmt:

- Betrag
- Richtung und
- Angriffspunkt



Das Bild zeigt einen Finger, der an einem Faden ein kleines Gewicht in Ruhe hält. Nach anschaulicher Erfahrung gelingt das nur dann, wenn die Kraft F des Fingers gleich groß mit der Gewichtskraft G ist (gleicher Betrag) und die gleiche, jedoch entgegengesetzte Richtung wie G besitzt.

Durch Betrag, Richtung und Richtungssinn ist also die Kraft F bestimmt. Zur Beschreibung der Kraft reicht es nicht aus, den Betrag allein anzugeben (z.B. 1,5 Newton). Zur Beschreibung der Kraft gehören zwingend die Angabe der Richtung und des Angriffspunktes. Im mathematischen Sinne handelt es sich also um einen *gebundenen Vektor*.

In der hier verwendeten Schreibweise bezeichnen wir den oben dargestellten *Kraftvektor* mit \underline{F} und den Betrag mit $|F|$ oder einfach mit F .

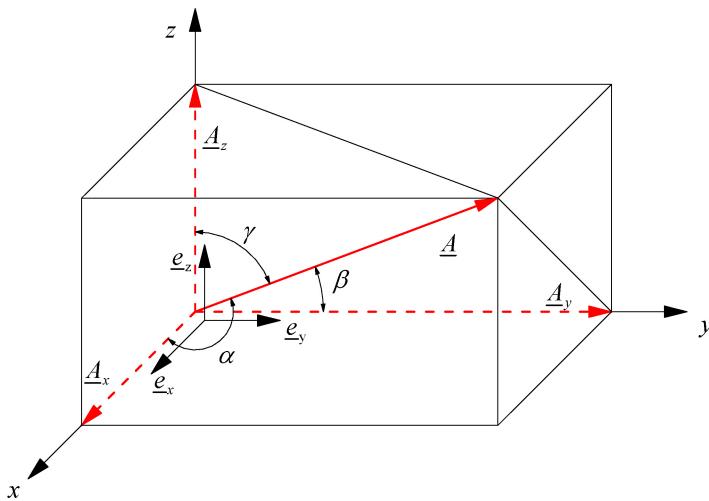


Abb. 1-1 Die Kraft als räumlicher gebundener Vektor

Im kartesischen Koordinatensystem kann der *Kraftvektor* \underline{F} mit Hilfe der Beträge in x,y,z-Richtung und den Einheitsvektoren $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ dargestellt werden mit

$$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z = F_x \cdot \underline{e}_x + F_y \cdot \underline{e}_y + F_z \cdot \underline{e}_z \quad (1.1)$$

Den Betrag von \underline{F} erhält man durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras im Raum

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.2)$$

Die Richtungswinkel können aus den Beträgen von \underline{F} berechnet werden mit

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (1.3)$$

1.2 Starre Körper

Ein Körper wird als *starrer Körper* bezeichnet, wenn er sich unter der Einwirkung von Kräften nicht deformiert. Dies ist eine Idealisierung, die genau genommen nie zutrifft, da alle Materialien deformierbar sind. In Tragsystemen des Bauwesens werden jedoch überwiegend Materialien verwendet, die sich unter üblichen Gebrauchsbedingungen sehr wenig verformen. Daher lohnt es sich, darüber nachzudenken, ob durch die Idealisierung der betrachteten statischen Systeme als starre Körper Vorteile für die Berechnung entstehen.

Bei einem *deformierbaren Körper* hat die Lage des *Kraftangriffspunktes* einen Einfluss auf das mechanische Verhalten, bei einem starren Körper dagegen nicht. Daher kommt es bei der Betrachtung der Kraftwirkung auf einen starren Körper nicht darauf an, wo genau die Kraft angreift. D.h. die angreifende Kraft darf entlang ihrer *Wirkungslinie* verschoben werden.

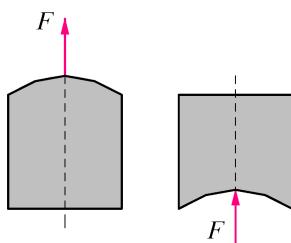


Abb. 1-2 Deformierbarer Körper

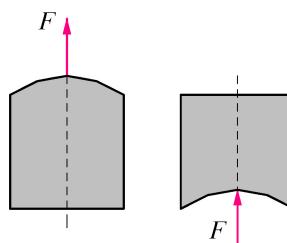


Abb. 1-3 Starrer Körper

Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes auf der Wirkungslinie. Die Kräfte an starren Körpern können daher als *linienflüchtige Vektoren* angenommen werden, die entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden dürfen.

Eine Parallelverschiebung von Kräften bewirkt jedoch eine veränderte Wirkung auf einen Körper.

1.3 Entstehung von Kräften

In der Technischen Mechanik werden reale Kräfte durch Idealisierung erfasst. Die einfachste Form der Idealisierung einer Kraft ist die Einzelkraft.

In der Realität treten nur zwei Arten von Kräften auf: *Volumenkräfte* (z.B. Gewichtskraft) und *Flächenkräfte* (z.B. hydrostatischer Druck)

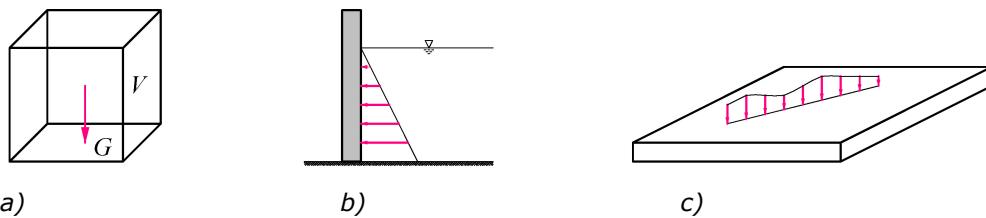


Abb. 1-4 Volumen-, Flächen-, Linienkräfte

In Abb. 1-4-a wird die verteilte Volumenlast durch eine Einzelkraft im Schwerpunkt des Körpers idealisiert. In Abb. 1-4-b ist der hydrostatische Druck auf die Fläche einer Staumauer dargestellt. Abb. 1-4-c zeigt die Idealisierung einer verteilten Belastung zu einer *Linienkraft* (Streckenlast), die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sein soll.

Weitere Kräfte, die in der Technischen Mechanik betrachtet werden, sind *Zwangskräfte*, die z.B. aus der Behinderung der temperaturbedingten Dehnung entstehen.

1.4 Schnittprinzip

In dieser Lehrveranstaltung geht es in erster Linie darum zu berechnen welche inneren Kräfte entstehen, wenn ein vorhandenes Tragwerk durch äußere Kräfte belastet wird. Dazu bedienen wir uns des *Schnittprinzips*, das am folgenden Beispiel erläutert wird:

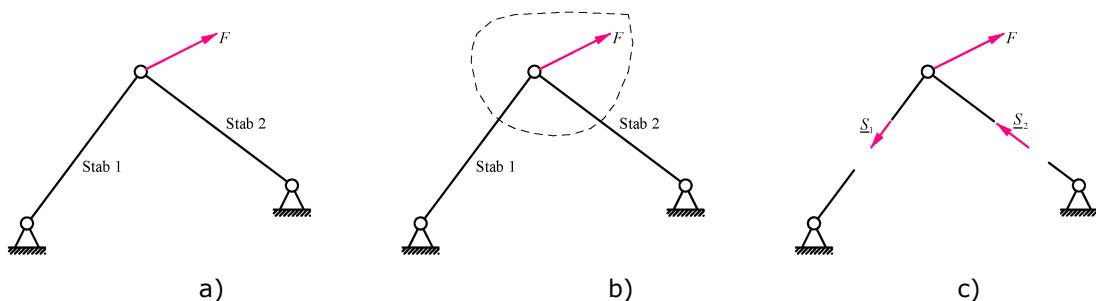


Abb. 1-5 Beispiel zum Schnittprinzip

Abb. 1-5-a zeigt einen Bock aus zwei Stäben, die jeweils an ihren unteren Enden gelenkig an einem Festpunkt verankert sind. Am oberen Ende, an dem die beiden Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, greift eine Einzelkraft F an. In Abb. 1-5-b wird gezeigt, wo ein gedachter Schnitt geführt wird (gestrichelte Linie). Wenn in der Realität dieser Schnitt geführt würde, dann könnte sich das in Abb. 1-5-c dargestellte Teilsystem frei bewegen. In Gedanken werden daher die Stäbe 1 und 2 durch die Kräfte S_1 und S_2 ersetzt, die gerade so beschaffen sein sollen, dass das Teilsystem in Ruhe bleibt. Damit werden die inneren Kräfte der Stäbe 1 und 2 sichtbar und können berechnet werden, wenn vorausgesetzt wird, dass sich die Kräfte F , S_1 und S_2 im *Gleichgewicht* befinden.

Auf eine einfache Formel gebracht lautet die Methode:

Schnittprinzip + Gleichgewichtsbedingungen

Zur Berechnung von inneren Kräften stehen in der Technischen Mechanik weitere Methoden zur Verfügung, die jedoch in dieser Lehrveranstaltung nicht behandelt werden.

1.5 Dimensionen und Einheiten

In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir das internationale Einheitensystem SI (Système International d' Unités). Für die hier interessierenden mechanischen Größen sind das die Grundeinheiten Meter (m), Sekunde (s) und Kilogramm (kg). Kräfte werden in Newton ($1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$) geführt, bzw. in Kilonewton ($1\text{ kN} = 1000\text{ N}$).

2 Zentrale Kraftsysteme

In diesem Kapitel werden Tragwerke (statische Systeme) behandelt, an denen ausschließlich Kräfte angreifen, die einen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Da wir nur starre Körper betrachten wollen, können wir hierunter auch Systeme betrachten, an denen Kräfte angreifen, deren Wirkungslinien sich in nur einem Punkt schneiden. Da die Kräfte an einem starren Körper als linienflüchtige Vektoren aufgefasst werden können, dürfen die Angriffspunkte auf den Wirkungslinien verschoben werden, ohne dass sich in der Wirkung etwas ändert.

Wenn alle Kräfte in einer Ebene liegen, dann bezeichnet man dies als *ebene zentrale Kräftegruppe* oder *ebenes zentrales Kraftsystem*.

2.1 Resultierende aus mehreren Kräften

Oft ist es unhandlich mit einer Vielzahl von Einzelkräften zu arbeiten und bequemer, eine Gruppe von Kräften zu einer resultierenden Kraft, kurz zur *Resultierenden* zusammenzufassen. Da zur Beschreibung einer Kraft sowohl der Betrag als auch die Richtung gehören, wird es nicht zu einem richtigen Ergebnis führen, wenn man nur die Beträge addiert. Die richtige Addition von mehreren Kräften zu einer Resultierenden wird als vektorielle Addition durchgeführt. Dies kann immer mit Hilfe der Vektorrechnung und für eine ebene Kräftegruppe durch grafische Addition erledigt werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2-1 Resultierende einer ebenen Kräftegruppe aus zwei Einzelkräften

Die Kräfte F_1 und F_2 bilden eine zentrale Kräftegruppe, die zu einer Resultierenden zusammengefasst werden soll. Zusätzlich soll der Winkel zwischen der Resultierenden und F_2 ermittelt werden.

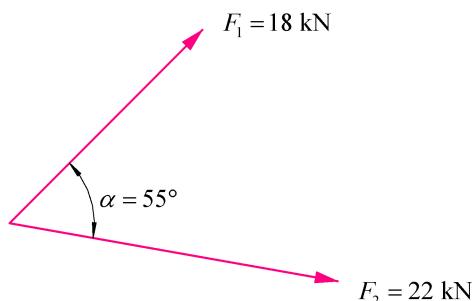


Abb. 2-1 Beispiel 2-1

Zeichnerische Lösung

Die Kräfte F_1 und F_2 werden maßstäblich und in der richtigen Richtung "hintereinander" gezeichnet, wobei die Reihenfolge keinen Einfluss auf das Ergebnis hat (siehe Abb. 2-2). Die Resultierende R erhält man, wenn man eine Verbindung vom Beginn der ersten Kraft (hier F_2) zur Spitze der letzten Kraft (hier F_1) zeichnet. Mit dem gewählten Maßstab kann der Betrag von R ermittelt werden und die Richtung ist aus der Zeichnung ersichtlich. Bei hinreichend hoher Zeichengenauigkeit kann der Betrag der Resultierenden mit $R = 35,5$ kN abgelesen werden. Der Winkel zwischen F_1 und R kann man mit Hilfe eines Winkelmessers mit $\gamma = 25^\circ$ messen.

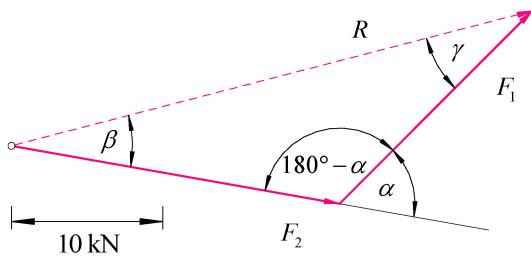


Abb. 2-2 Kräfteplan

Lösung mit Hilfe der analytischen Geometrie

In die Zeichnung sind außer dem Winkel α , den die Kräfte F_1 und F_2 einschließen, noch weitere Winkel eingezeichnet. Das Dreieck aus F_1 , F_2 und R lässt sich auch mit Hilfe der analytischen Geometrie berechnen (Kosinussatz):

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{18^2 + 22^2 - 2 \cdot 18 \cdot 22 \cdot \cos(180^\circ - 55^\circ)} = 35,5 \text{ kN}$$

Damit ist der Betrag von R berechnet. Um die Richtung von R zu ermitteln kann auf den Sinussatz zurückgegriffen werden, mit dem sich der Winkel β zwischen F_2 und R berechnen lässt:

$$\frac{\sin \beta}{F_1} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{R} \rightarrow \sin \beta = F_1 \cdot \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{R} \rightarrow \beta = \arcsin\left(18 \cdot \frac{\sin(180^\circ - 55^\circ)}{35,5}\right) = 24,5^\circ$$

Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Zunächst müssen die Kräfte F_1 und F_2 als Vektoren aufgestellt werden. Hierzu wird ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt. Hier wird nicht eine horizontale und eine vertikale Richtung für x und y gewählt, sondern die x -Achse wird parallel zu F_2 gelegt. Das spart Arbeit bei der Aufstellung der Kraftvektoren.

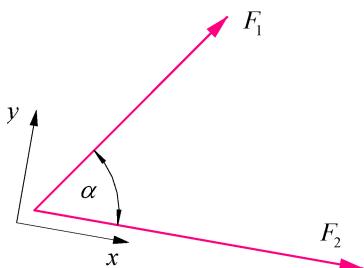


Abb. 2-3 Wahl des Koordinatensystems

Die Kraftvektoren werden im gewählten Koordinatensystem aufgestellt:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha \\ F_1 \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \cdot \cos 55^\circ \\ 18 \cdot \sin 55^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,32 \\ 14,74 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die vektorielle Addition von F_1 und F_2 ergibt:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,32 + 22 \\ 14,74 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32,32 \\ 14,74 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{32,32^2 + 14,74^2} = 35,5 \text{ kN}$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich der Winkel β zwischen F_2 und R berechnen:

$$\underline{F}_2 \cdot \underline{R} = F_2 \cdot R \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{1}{F_2 \cdot R} \cdot (\underline{F}_2 \cdot \underline{R}) = \frac{1}{F_2 \cdot R} \cdot (F_{2x} \cdot R_x + F_{2y} \cdot R_y) = \frac{22 \cdot 32,32 + 0 \cdot 14,74}{22 \cdot 35,5} = \frac{32,32}{35,5} = 0,9104$$

$$\beta = \arccos(0,9104) = 24,4^\circ$$

Beispiel 2-2 Resultierende einer ebenen Kräftegruppe aus vier Einzelkräften

Die Kräfte F_1 bis F_4 bilden eine zentrale Kräftegruppe, die zu einer Resultierenden zusammengefasst werden soll. Zu den Beträgen der Kräfte sind die Winkel gegenüber einer horizontalen Linie gegeben.

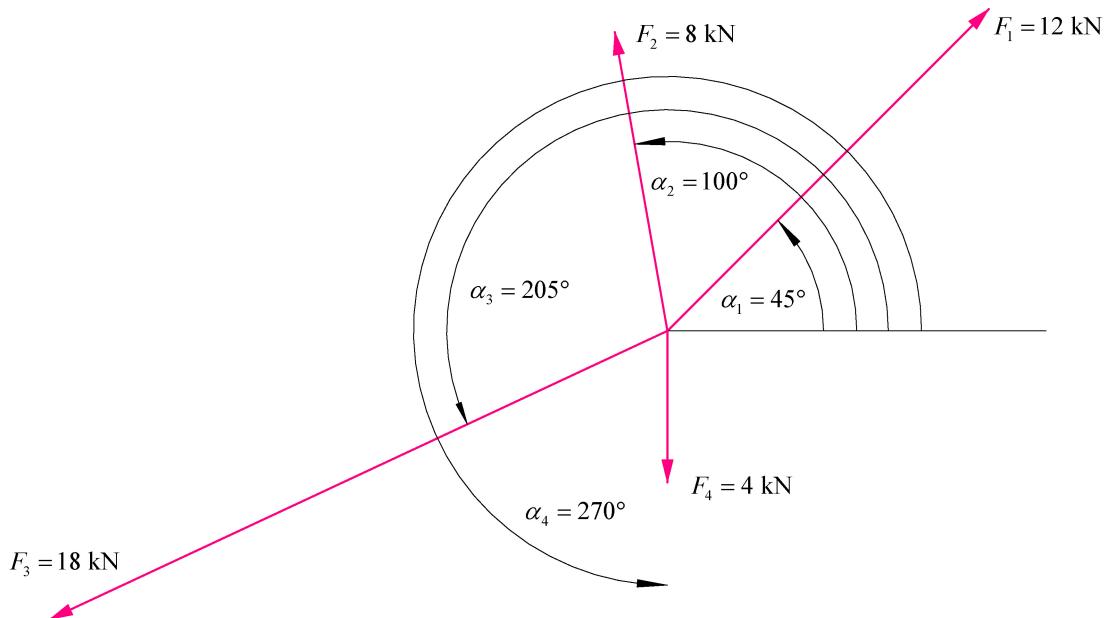


Abb. 2-4 Beispiel 2-2

Zeichnerische Lösung

Die Kräfte F_1 bis F_4 werden maßstäblich und in der richtigen Richtung "hintereinander" gezeichnet, wobei die Reihenfolge keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Die Resultierende R erhält man, wenn eine Verbindung vom Beginn der ersten Kraft (hier F_1) zur Spitze der letzten Kraft (hier F_4) zeichnet. Mit dem gewählten Maßstab kann der Betrag von R ermittelt werden und die Richtung ist aus der Zeichnung ersichtlich.

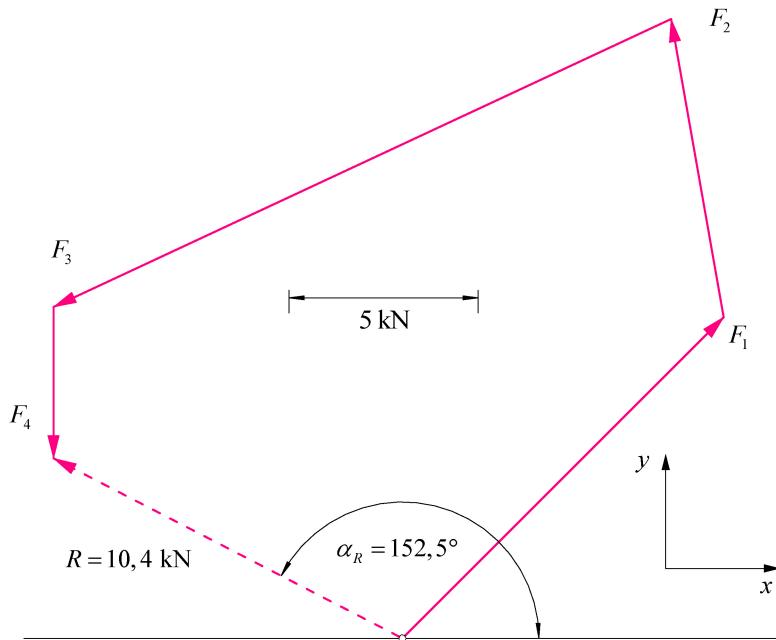


Abb. 2-5 Kräfteplan

Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Zunächst müssen die Kräfte F_1 bis F_4 als Vektoren aufgestellt werden. Hierzu wird ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt. Die x-Achse wird parallel zur horizontalen Linie gelegt und zeigt nach rechts.

Die Kraftvektoren werden im gewählten Koordinatensystem aufgestellt:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha \\ F_1 \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot \cos 45^\circ \\ 12 \cdot \sin 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,49 \\ 8,49 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \cdot \cos \alpha \\ F_2 \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot \cos 100^\circ \\ 8 \cdot \sin 100^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,39 \\ 7,88 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \cdot \cos \alpha \\ F_3 \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \cdot \cos 205^\circ \\ 18 \cdot \sin 205^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16,31 \\ -7,61 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_4 = \begin{bmatrix} F_{4x} \\ F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha \\ F_4 \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \cos 270^\circ \\ 4 \cdot \sin 270^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -4,0 \end{bmatrix}$$

Die vektorielle Addition von F_1 bis F_4 ergibt:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,49 - 1,39 - 16,31 + 0,00 \\ 8,49 + 7,88 - 7,61 - 4,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9,22 \\ 4,76 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-9,22)^2 + 4,76^2} = 10,4 \text{ kN}$$

Der Neigungswinkel von \underline{R} gegenüber der x-Achse lässt sich aus den Komponenten R_x und R_y bestimmen:

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{4,76}{-9,22} = -0,52$$

$$\alpha_R = \arctan(-0,52) = -27,5^\circ \pm 180^\circ \rightarrow \alpha_R = -27,5^\circ \text{ bzw. } 152,5^\circ$$

2.2 Gleichgewicht in der Ebene

Welche Bedingungen können wir aus der Tatsache ableiten, dass ein Körper in Ruhe und im Gleichgewicht ist? Die Antwort ist: ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn sich alle wirkenden Kräfte aufheben. Mathematisch ausgedrückt:

**Eine zentrale Kräftegruppe ist im Gleichgewicht
wenn die Summe aller Kraftvektoren Null ist (2.1).**

$$\underline{R} = \sum \underline{F}_i = \underline{0}$$

Abb. 2-6 stellt zwei Beispiele für ebene *Gleichgewichtsgruppen* dar. Abb. 2-6a zeigt einen Fall, der unmittelbar einleuchtet: an einem Körper greifen zwei Kräfte \underline{F}_1 und $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$ an, die eine identische Wirkungslinie haben. Damit sich der Körper im Gleichgewicht befindet, müssen die beiden Kräfte gleich groß sein und in entgegengesetzten Richtungen wirken.

In Abb. 2-6b sind fünf Kräfte vorhanden. Diese befinden sich dann im Gleichgewicht, wenn die maßstäbliche zeichnerische Darstellung der Vektoren ergibt, dass der Endpunkt der letzten Kraft genau am Anfangspunkt der ersten Kraft liegt (durch einen kleinen Kreis gekennzeichnet).

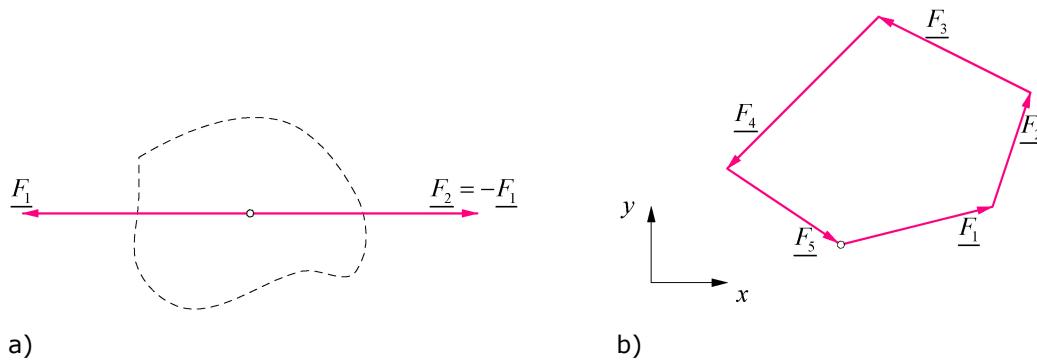


Abb. 2-6 *Ebene Gleichgewichtsgruppen*

Aus beiden Teilen der Abb. 2-6 ergibt sich auch, dass die resultierende Kraft nur dann zu Null wird, wenn ihre Komponenten jeweils zu Null werden. Das bedeutet aber auch, dass sowohl die Summe der x-Komponenten als auch die Summe der y-Komponenten Null ergeben muss.

$$\sum F_{ix} = 0 \text{ und } \sum F_{iy} = 0 \quad (2.2)$$

Beispiel 2-3 Berechnung der Kraft an einer Öse mit zwei belasteten Seilen

Zwei Seile mit den Seilkräften F_1 und F_2 sind an einer Öse befestigt. Wie groß ist die von der Öse aufgenommene Kraft und in welche Richtung wirkt sie?

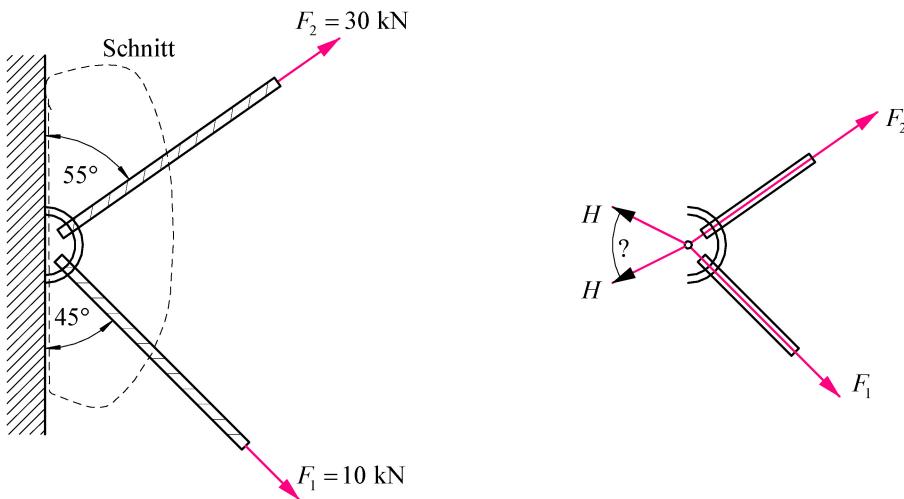


Abb. 2-7 Beispiel 2-3

Wir wenden "Schnittpunktprinzip und Gleichgewichtsbedingungen" an. Als erstes führen wir einen gedachten Schnitt durch die Öse und dann weiter durch die Seile. Wichtig: der Schnitt muss immer eine geschlossene Kurve sein.

Den Teil des statischen Systems, der innerhalb des Schnittes liegt, zeichnen wir heraus und tragen die Kräfte an (Abb. 2-7, rechte Zeichnung). Für die Haltekraft der Öse tragen wir am Mittelpunkt der Öse die unbekannte Kraft H ein, deren genaue Richtung wir nicht kennen.

Als nächstes verschieben wir die Kräfte F_1 und F_2 auf den Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien.

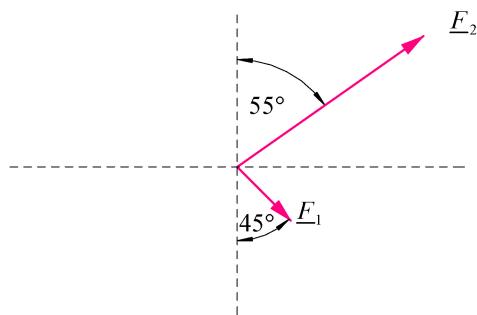
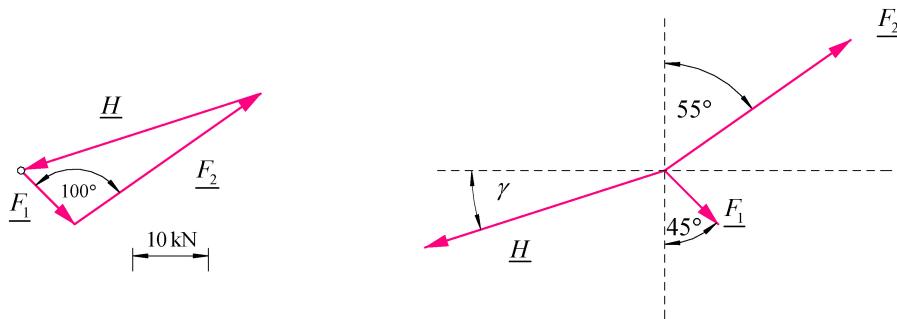


Abb. 2-8 Lageplan der Seilkräfte

Grafische Lösung

Die Vektoren \underline{F}_1 und \underline{F}_2 werden maßstäblich grafisch addiert (Abb. 2-9 links). Der Vektor \underline{H} schließt das Dreieck, die Summe der Kraftvektoren ist Null. Damit ist der Vektor \underline{H} bestimmt. Der Betrag von \underline{H} und der Winkel zwischen der Horizontalen und Vektor \underline{H} können in der Zeichnung gemessen werden. Die gemessenen Werte betragen $H = 33,2 \text{ kN}$ und $\gamma = 18^\circ$. In den Lageplan der Kräfte aus Abb. 2-8 wird der Vektor \underline{H} eingetragen (Abb. 2-9 rechts).

Abb. 2-9 Kräfteplan und Lageplan der Kräfte mit H Rechnerische Lösung mit Hilfe der analytischen Geometrie

Das Dreieck des Kräfteplans in Abb. 2-9 kann mit Hilfe des Kosinussatzes auch rechnerisch bestimmt werden. Die Berechnung des Neigungswinkel γ von \underline{H} ist ebenfalls möglich.

$$H = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 100^\circ} = \sqrt{10^2 + 30^2 - 2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot \cos 100^\circ} = 33,2 \text{ kN}$$

Rechnerische Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Zunächst müssen die Kräfte F_1 und F_2 als Vektoren aufgestellt werden. Hierzu wird ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt.

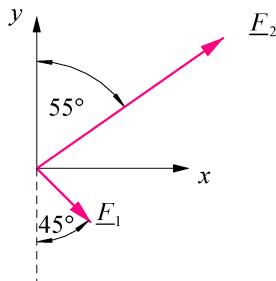


Abb. 2-10 Koordinatensystem

Die Kraftvektoren werden im gewählten Koordinatensystem aufgestellt:

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \cdot \sin \alpha \\ -F_1 \cdot \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot \sin 45^\circ \\ -10 \cdot \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,07 \\ -7,07 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \cdot \sin \alpha \\ F_2 \cdot \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \cdot \sin 55^\circ \\ 30 \cdot \cos 55^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,57 \\ 17,21 \end{bmatrix}$$

Die vektorielle Addition von \underline{F}_1 und \underline{F}_2 ergibt:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,07 + 24,57 \\ -7,07 + 17,21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,64 \\ 10,14 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{R}| = R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{31,64^2 + 10,14^2} = 33,2 \text{ kN}$$

Der Neigungswinkel von R gegenüber der x-Achse lässt sich aus den Komponenten R_x und R_y bestimmen:

$$\tan \alpha_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{10,14}{31,64} = 0,3205$$

$$\alpha_R = \arctan(0,3205) = 17,8^\circ$$

Beispiel 2-4 Gleichgewicht an einer durch ein Seil gehaltenen Walze

Eine Walze mit dem Gewicht G wird durch ein Seil auf einer glatten schießen Ebene gehalten (Abb. 2-11 links). Wie groß sind die Kontaktkraft N zwischen Walze und Ebene und die Seilkraft S ?

Gegeben: $G = 80 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$

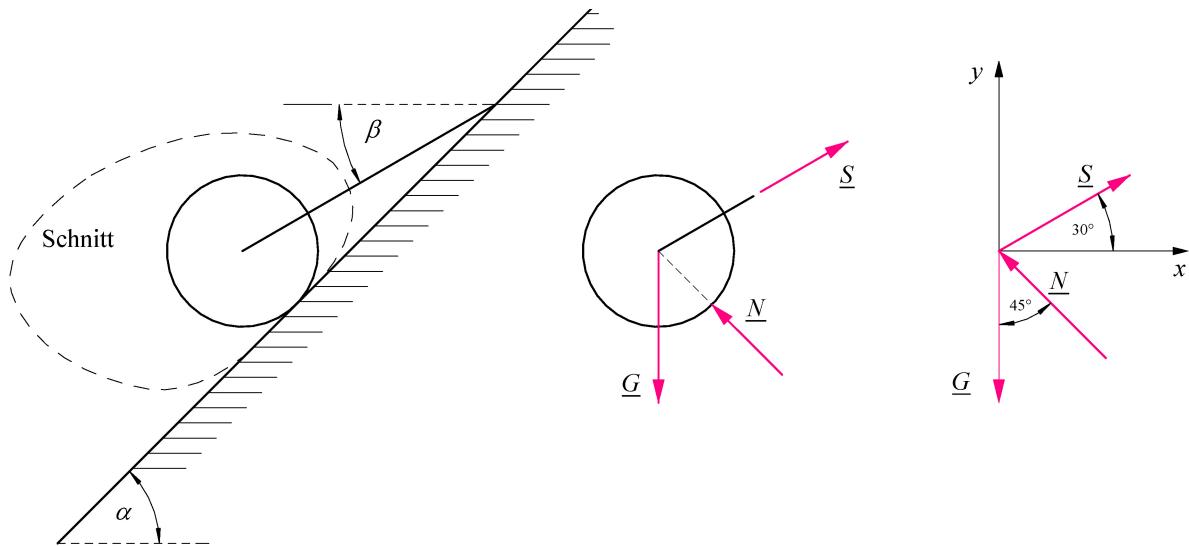


Abb. 2-11 Beispiel 2-4

Wie in *Beispiel 2-3* wird ein Schnitt geführt, der die gesuchten Kräfte S und N sichtbar machen soll (Abb. 2-11 links). Das Teilsystem innerhalb des Schnittes wird heraus gezeichnet (Abb. 2-11 Mitte) und die Kräfte angetragen. Die Kräfte werden in den Schnittpunkt der Wirkungslinien verschoben und ein Koordinatensystem eingeführt (Abb. 2-11 rechts). Als wichtige zusätzliche Informationen werden folgende Kenntnisse verwendet: ein Seil kann nur Zugkräfte übertragen und die Kontaktkraft, die auf die Walze wirkt, zeigt auf deren Mittelpunkt und steht senkrecht zur Kontaktfläche.

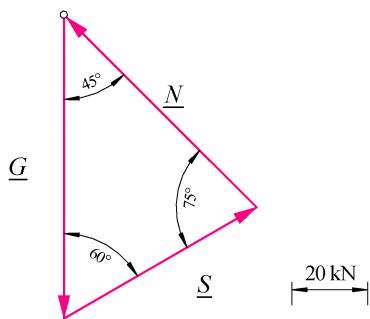
Grafische Lösung

Abb. 2-12 Kräfteplan

Aus der grafischen Lösung lassen sich folgende Werte ermitteln: $S \approx 59 \text{ kN}$ und $N \approx 72 \text{ kN}$.

Rechnerische Lösung mit Hilfe des Sinussatzes

$$\frac{S}{G} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \rightarrow S = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot 80 = 58,56 \text{ kN}$$

$$\frac{N}{G} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \rightarrow N = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot 80 = 71,73 \text{ kN}$$

Rechnerische Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Wir haben lediglich den Kraftvektor \underline{G} vollständig vorliegen:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \end{bmatrix}$$

Von den Kraftvektoren \underline{S} und \underline{N} kennen wir zwar die Richtung, jedoch nicht den Betrag. Daher stellen wir zwei Vektoren \underline{A} und \underline{B} auf, die in Richtung von \underline{S} und \underline{N} zeigen und multiplizieren diese mit skalaren Faktoren, die ermittelt werden müssen:

$$\underline{S} = a \cdot \underline{A} \text{ mit } \underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \cdot \tan 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan 30^\circ \end{bmatrix}$$

$$\underline{N} = b \cdot \underline{B} \text{ mit } \underline{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingung in vektorieller Schreibweise lautet gemäß (2.1):

$$\sum \underline{F}_i = \underline{0}:$$

$$\underline{G} + \underline{S} + \underline{N} = \underline{0}$$

$$\underline{G} + a \cdot \underline{A} + b \cdot \underline{B} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -80 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \tan 30^\circ \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn man beachtet, dass ein Vektor zu Null wird, wenn seine Komponenten zu Null werden, kann man die vorstehende Gleichung gemäß (2.2) wie folgt schreiben:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad 0 + a - b = 0 \quad (\rightarrow b = a)$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -80 + a \cdot \tan 30^\circ + b = 0$$

Wir erhalten also zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und b . Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$a = b = \frac{80}{1 + \tan 30^\circ} = 50,718$$

Man kann zu Aufgabenstellungen wie dieser eine allgemeine Lösung angeben:

Allgemeine Lösung:	Anschaulich:	Unser Beispiel:
$a \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \tan 30^\circ \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 80 \end{bmatrix}$
$D = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$	$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$	$D = 1 \cdot 1 - \tan 30^\circ \cdot (-1) = 1,577$
$a = -\frac{B_x \cdot F_y - B_y \cdot F_x}{D}$	$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$a = -\frac{(-1) \cdot 80 - 1 \cdot 0}{1,577} = \frac{80}{1,577} = 50,718$
$b = +\frac{A_x \cdot F_y - A_y \cdot F_x}{D}$	$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} >><< \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$b = \frac{1 \cdot 80 - \tan 30^\circ \cdot 0}{1,577} = \frac{80}{1,577} = 50,718 (= a)$

Damit können die gesuchten Kraftvektoren aufgestellt und ihre Beträge berechnet werden:

$$\underline{S} = a \cdot \underline{A} = 50,718 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \tan 30^\circ \end{bmatrix} \rightarrow |\underline{S}| = S = 50,718 \cdot \sqrt{1^2 + (\tan 30^\circ)^2} = 58,56 \text{ kN}$$

$$\underline{N} = b \cdot \underline{B} = 50,718 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \rightarrow |\underline{N}| = N = 50,718 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 71,73 \text{ kN}$$

2.3 Gleichgewicht im Raum

Kraftvektoren im Raum sind durch jeweils drei Komponenten parametrisiert. Analog zu den Gleichungen (2.1) und (2.2) in Kapitel 2.2 kann für das Gleichgewicht der Kräfte im Raum ebenfalls formuliert werden

$$\sum \underline{F}_i = \underline{0} \quad (2.3)$$

und

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \text{und} \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \text{und} \quad \sum F_{iz} = 0 \quad (2.4)$$

Im Gegensatz zu ebenen Gleichgewichtsaufgaben lassen sich für räumliche Aufgaben nur selten einfache grafische Lösungen finden.

Beispiel 2-5 Gleichgewicht an einer räumlichen Aufhängung

In einer rechtwinkligen Raumecke sind zwei Stäbe mit den Bezeichnungen "1" und "2" in einer horizontalen Ebene rechtwinklig zu den Wänden angeordnet. Am Verbindungsgelenk, das durch ein schräges Seil "3" gehalten wird, greift die Last G an. Wie groß sind die Kräfte in den Stäben und im Seil?

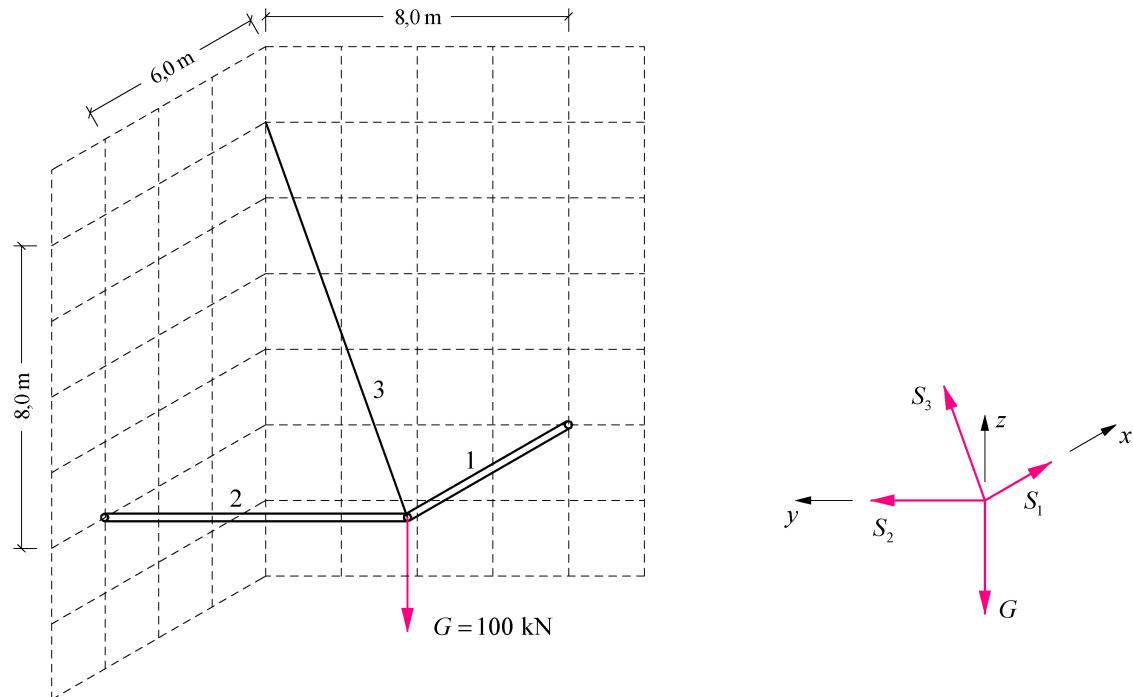


Abb. 2-13 Beispiel 2-5

Im Tragsystem wird um den Verbindungsknoten, an dem die Last G angreift, ein Schnitt in der Weise geführt, dass der Knoten völlig frei ist. Abb. 2-13 rechts zeigt die am Knoten wirkenden Schnittkräfte S_1 , S_2 und S_3 sowie die Last G . Ein rechtwinkliges Koordinatensystem wurde so gewählt, dass x und y in Richtung von S_1 und S_2 zeigen. Die Richtung von z entspricht einem Rechtssystem.

Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Wie in Beispiel 2-4 haben wir lediglich den Kraftvektor \underline{G} vollständig vorliegen:

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}$$

Von den Kraftvektoren \underline{S}_1 , \underline{S}_2 und \underline{S}_3 kennen wir zwar die Richtung, jedoch nicht den Betrag. Daher stellen wir drei Hilfsvektoren auf, die in Richtung von \underline{S}_1 , \underline{S}_2 und \underline{S}_3 zeigen und multiplizieren diese mit skalaren Faktoren, die ermittelt werden müssen:

$$\underline{S}_1 = S_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{S}_2 = S_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{S}_3 = a \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Da die Hilfsvektoren zu \underline{S}_1 und \underline{S}_2 die Länge Eins haben, sind die beiden zugehörigen skalaren Faktoren mit S_1 und S_2 bezeichnet, da es sich hierbei unmittelbar um die Beträge der Vektoren \underline{S}_1 und \underline{S}_2 handelt. Da der Hilfsvektors zu \underline{S}_3 eine Länge ungleich Eins hat, ist der zugehörige skalare Faktor mit a bezeichnet, da es sich hierbei nicht um den Betrag des Vektors \underline{S}_3 handelt.

Die Gleichgewichtsbedingung in vektorieller Schreibweise lautet gemäß (2.3):

$$\sum \underline{F}_i = \underline{0}: \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{G} = \underline{0} \quad \text{oder} \quad \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = -\underline{G}$$

oder:

$$S_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + S_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +100 \end{bmatrix}$$

Wenn man beachtet, dass ein Vektor zu Null wird, wenn seine Komponenten zu Null werden, kann man die vorstehende Gleichung gemäß (2.4) wie folgt schreiben:

$$S_1 + 6a = 0 \quad \rightarrow \quad S_1 = -6a$$

$$S_2 + 8a = 0 \quad \rightarrow \quad S_2 = -8a$$

$$8a = 100 \quad \rightarrow \quad a = 12,5$$

$$S_1 = -75 \text{ kN}$$

$$S_2 = -100 \text{ kN}$$

$$S_3 = 12,5 \cdot \sqrt{6^2 + 8^2 + 8^2} = 160,1 \text{ kN}$$

Was bedeuten die negativen Vorzeichen von S_1 und S_2 ?

Wir haben die die Vektoren \underline{S}_1 , \underline{S}_2 und \underline{S}_3 in Abb. 2-13 rechts so gewählt, dass sie jeweils vom Schnittufer weg zeigen und nicht vom Schnittufer in die Stäbe oder das Seil hinein. Diese Kraftrichtungen entsprechen jeweils einer Zugkraft. Die drei zugehörigen Hilfsvektoren haben wir mit gleichem Richtungssinn aufgestellt. In Wirklichkeit wissen wir aber bei der Aufstellung der Hilfsvektoren nicht, ob eine Zugkraft oder eine Druckkraft herrscht. Da die Beträge S_1 und S_2 negativ sind, dreht sich der Richtungssinn der Vektoren um. Dies bedeutet, dass in Wirklichkeit Druckkräfte vorliegen!

Das Ergebnis wird daher zur Verdeutlichung nochmals geschrieben:

$$S_1 = -75 \text{ kN} \quad (\text{Druck})$$

$$S_2 = -100 \text{ kN} \quad (\text{Druck})$$

$$S_3 = +160,1 \text{ kN} \quad (\text{Zug})$$

3 Allgemeine Kraftsysteme

In diesem Kapitel werden statische Systeme behandelt, an denen Kräfte angreifen, deren Wirkungslinien sich nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Wir können zwar unter der Voraussetzung, dass nur starre Körper betrachtet werden, die Kräfte auf der Wirkungslinie verschieben, es gelingt bei diesen Kraftsystemen jedoch nicht, durch Verschiebung alle Kräfte in einem gemeinsamen Punkt angreifen zu lassen.

3.1 Moment eines Kräftepaars

Der einfachste Fall liegt vor, wenn zwei gleich große, entgegengesetzt wirkende Kräfte auf zwei parallelen Linien wirken.

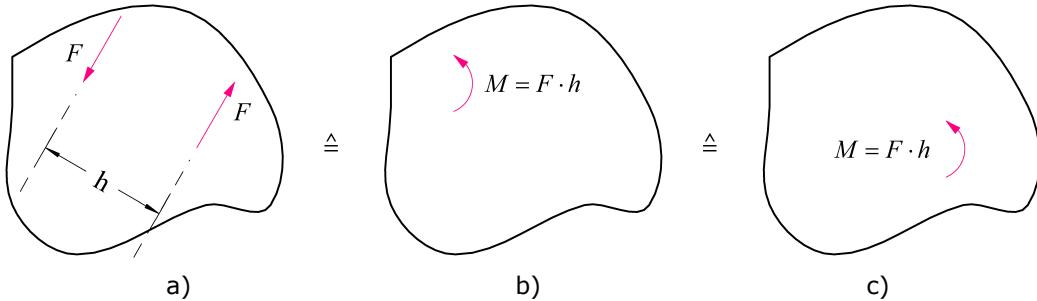


Abb. 3-1 Moment eines Kräftepaars

Die Resultierende Kraft aus den beiden in Abb. 3-1a wirkenden Kräften ist gleich Null. Dennoch hat diese Kräftegruppe eine Wirkung auf den Körper, sie wäre in der Lage den Körper zu drehen. Die Wirkung eines solchen Kräftepaars bezeichnet man als *Drehmoment* oder kurz als *Moment*. Dieses ist gegeben durch den Betrag der Kraft F und den Hebelarm h :

$$M = F \cdot h \quad (3.1)$$

Eine weitere Information zur Festlegung des Momentes ist der *Drehsinn*. Im ebenen Fall wie in Abb. 3-1a gibt es zwei Möglichkeiten: ein Moment kann im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn wirken. Im Beispiel der Abb. 3-1a wirkt das aus dem Kräftepaar entstehende Moment entgegen dem Uhrzeigersinn.

Da die Resultierende der beiden entgegengesetzt wirkenden Kräfte F zu Null wird, kann ihre Wirkung auch wie in Abb. 3-1b oder Abb. 3-1c dargestellt werden. Die Wirkung eines Momentes auf einen starren Körper ist unabhängig vom Angriffspunkt.

3.2 Moment einer Kraft

Die Verschiebung einer Kraft auf ihrer Wirkungslinie verändert nicht die Wirkung auf einen starren Körper. Eine Parallelverschiebung der Wirkungslinie verändert jedoch die Kraftwirkung.

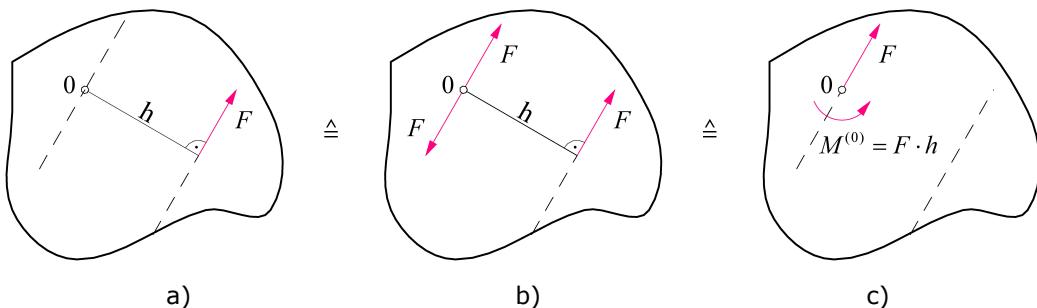


Abb. 3-2 Moment einer Kraft in Bezug auf einen Drehpunkt

Um zu zeigen, welche Wirkung die Verschiebung der Wirkungslinie hat, wird das Beispiel in Abb. 3-2a gewählt. Die Wirkungslinie der Kraft F soll in den Punkt 0 verschoben werden, die Wirkung auf den starren Körper soll jedoch unverändert bleiben. Hierzu wird in Abb. 3-2b eine Kräftegruppe aus zwei Kräften F angebracht, die sich in ihrer Wirkung aufheben. Die Resultierende dieser drei Kräfte F ist also die gleiche wie in Abb. 3-2a. Im nächsten Schritt der Abb. 3-2c wird das Kräftepaar bestehend aus F links unten und F rechts oben, das den Hebelarm h hat, durch das Moment $M = F \cdot h$ ersetzt. Um kenntlich zu machen, dass dieses Moment bezüglich des Drehpunktes 0 berechnet wurde, lautet die Bezeichnung des Momentes besser: $M^{(0)} = F \cdot h$.

Das Moment einer Kraft bezüglich eines Drehpunktes wird also einfach ermittelt durch:

$$\text{Moment} = \text{Kraft} \cdot \text{Hebelarm} \quad (3.2)$$

wobei der *Hebelarm* das Lot vom Drehpunkt auf die Wirkungslinie der Kraft ist.

3.3 Resultierende aus mehreren Momenten

Ähnlich wie Kräfte können Momente unter Beachtung ihres Drehsinnes zu einem *resultierenden Moment* zusammengefasst werden.

$$M_R = \sum M_i \quad (3.3)$$

3.4 Resultierende ebener Kraftsysteme

Oft ist es unhandlich, mit einer Vielzahl von Einzelkräften zu arbeiten und bequemer, eine Gruppe von Kräften zu einer resultierenden Kraft, kurz zur *Resultierenden* zusammenzufassen. Da zur Beschreibung einer Kraft Betrag, Richtung und Angriffspunkt (Lage der Wirkungslinie bei starren Körpern) gehören, wird es nicht zu einem richtigen Ergebnis führen, wenn man nur die Kraftvektoren addiert. Zusätzlich muss beachtet werden, dass jede Kraft ein Moment bezüglich eines Drehpunktes bewirkt.

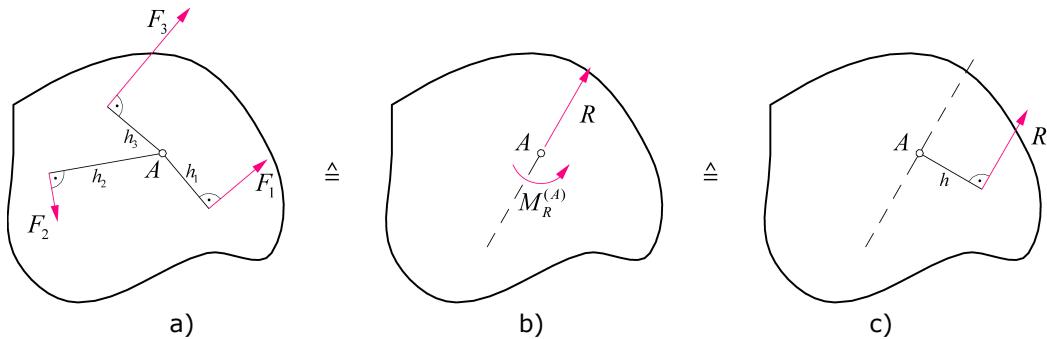


Abb. 3-3 Ermittlung der Resultierenden eines ebenen Kraftsystems

Um die Resultierende eines ebenen Kraftsystems wie in Abb. 3-3a zu ermitteln, wird in zwei Schritten vorgegangen.

Im Schritt 1 werden die resultierende Kraft R und das resultierende Moment M_R in Bezug auf einen beliebig gewählten Drehpunkt (z.B. Punkt A) ermittelt (siehe Abb. 3-3b).

$$R = \sum F_i \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)} \quad (3.5)$$

Der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Resultierenden wird berechnet mit

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{R_y}{R_x} \quad (3.6)$$

Im Schritt 2 wird die Wirkungslinie von R im Abstand h so verschoben, dass in Bezug auf Punkt A das Moment $M_R^{(A)}$ wirkt (siehe Abb. 3-3c).

$$M_R^{(A)} = h \cdot R \quad \rightarrow \quad h = \left| \frac{M_R^{(A)}}{R} \right| \quad (3.7)$$

Beispiel 3-1 Resultierende aus drei Kräften

An einem doppelt symmetrischen starren Körper greifen neben dem Eigengewicht G die Kräfte F_1 und F_2 an. Zu ermitteln ist die Resultierende dieser Kräftegruppe.

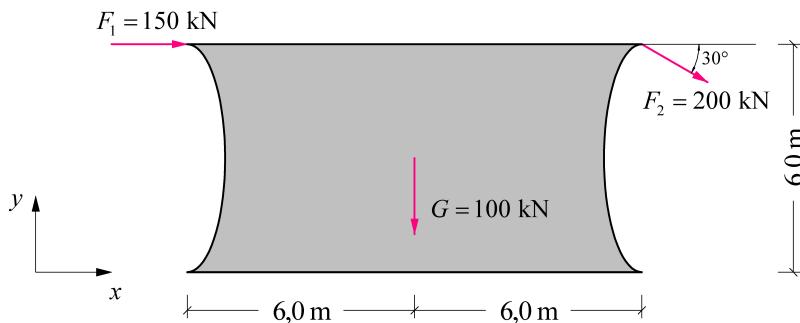


Abb. 3-4 Beispiel 3-1

Schritt 1: die Resultierende Kraft R und das resultierende Moment $M_R^{(A)}$ in Bezug auf einen beliebig gewählten Punkt werden berechnet.

$$\begin{aligned} \underline{G} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -100 \end{bmatrix} & \underline{F}_1 &= \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \end{bmatrix} & \underline{F}_2 &= \begin{bmatrix} 200 \cdot \cos 30^\circ \\ -200 \cdot \sin 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173,2 \\ -100 \end{bmatrix} \\ \underline{R} &= \begin{bmatrix} 0 + 150 + 173,2 \\ -100 + 0 - 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 323,2 \\ -200 \end{bmatrix} & \rightarrow R &= \sqrt{(323,2)^2 + 200^2} = 380,1 \text{ kN} \\ \tan \alpha &= \frac{R_y}{R_x} = \frac{-200}{323,2} = -0,62 & \rightarrow \alpha &= -31,75^\circ \end{aligned}$$

Als Bezugspunkt A wird der Mittelpunkt des Körpers gewählt:

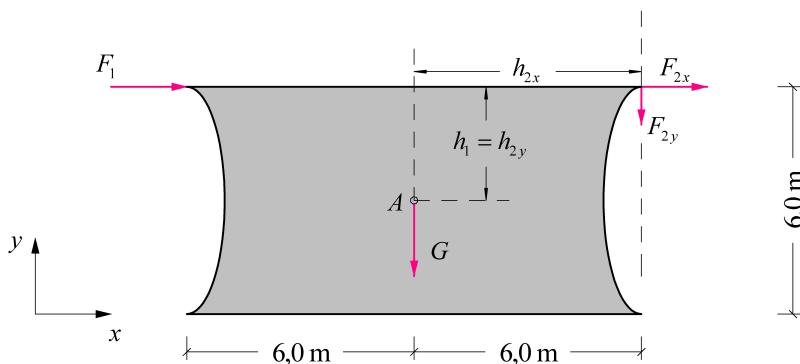


Abb. 3-5 Aufstellung des resultierenden Momentes in Bezug auf Punkt A

Zu den Kräften G , F_1 und F_2 muss jeweils der Hebelarm bestimmt werden. Der Hebelarm zu G ist $h_G = 0$, der Hebelarm zu F_1 ist $h_1 = 3,0 \text{ m}$. Die Aufstellung des Hebelarmes zu F_2 ist etwas lästig, daher bedienen wir uns eines kleinen Tricks: wir zerlegen F_2 in die zwei Komponenten F_{2x} und F_{2y} , die bereits vorliegen. Wir haben jetzt also anstatt einer Kraft F_2 die beiden Kräfte F_{2x} und F_{2y} , die die gleiche Wirkung auf den Körper haben wie F_2 . Zu diesen beiden Kräften lassen sich die Hebelarme sehr bequem aufstellen: der Hebelarm zu F_{2x} ist $h_{2y} = 3,0 \text{ m}$ und zu F_{2y} ist $h_{2x} = 6,0 \text{ m}$.

Bevor wir das resultierende Moment in Bezug auf A aufstellen, muss ein positives Vorzeichen für den Drehsinn festgelegt werden. Wir wählen den Gegenuhrzeigersinn als positiv:

$$M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)} = G \cdot h_G - F_1 \cdot h_1 - F_{2x} \cdot h_{2y} - F_{2y} \cdot h_{2x}$$

$$M_R^{(A)} = 100 \cdot 0 - 150 \cdot 3 - 173,2 \cdot 3 - 100 \cdot 6 = -1.569,6 \text{ kNm}$$

Das negative Vorzeichen von $M_R^{(A)}$ bedeutet: das resultierende Moment wirkt im Uhrzeigersinn.

Schritt 2: die Verschiebung der Wirkungslinie der Resultierende Kraft R gegenüber Punkt A :

$$h = \left| \frac{M_R^{(A)}}{R} \right| = \frac{1.569,6}{380,1} = 4,13 \text{ m}$$

Das Ergebnis ist in Abb. 3-6 dargestellt.

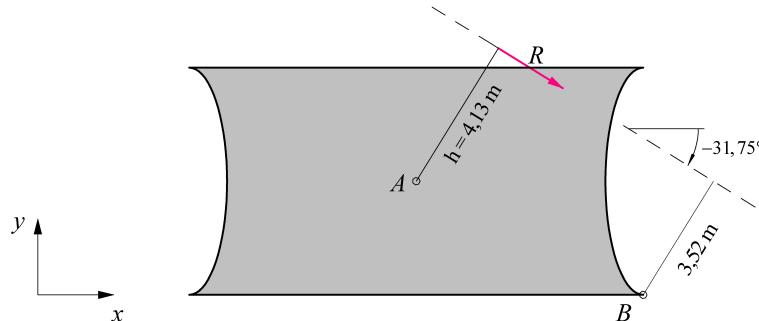


Abb. 3-6 Ergebnis bei Wahl von Punkt A

Aus der maßstäblichen Zeichnung Abb. 3-6 kann der Hebelarm bezüglich des Punktes B gemessen werden, er beträgt 3,52 m.

Um einmal nachzuvollziehen, dass die Wahl des Bezugspunktes beliebig ist, wählen wir Punkt B und rechnen nochmals. Die Hebelarme sind in Abb. 3-7 eingetragen.

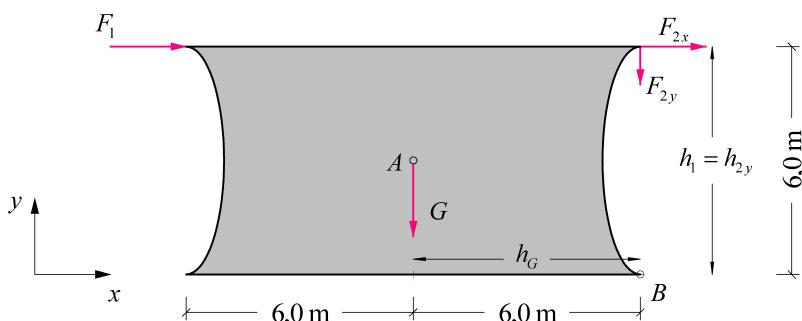


Abb. 3-7 Hebelarme bei Wahl von Punkt B

Schritt 1: die resultierende Kraft ist die gleiche wie bei der Wahl des Punktes A , das resultierende Moment ist wie folgt:

$$M_R^{(B)} = \sum M_i^{(B)} = G \cdot h_G - F_1 \cdot h_1 - F_{2x} \cdot h_{2y} - F_{2y} \cdot h_{2x}$$

$$M_R^{(B)} = +100 \cdot 6 - 150 \cdot 6 - 173,2 \cdot 6 + 100 \cdot 0 = -1.339,2 \text{ kNm}$$

Schritt 2: die Verschiebung der Wirkungslinie der resultierenden Kraft R gegenüber Punkt B :

$$h = \left| \frac{M_R^{(B)}}{R} \right| = \frac{1.339,2}{380,1} = 3,52 \text{ m}$$

Die Wirkungslinie von R ist identisch mit der zuvor ermittelten Wirkungslinie bei Wahl des Punktes A . Wir freuen uns...

3.5 Gleichgewicht in der Ebene

Ein Körper, auf den ein allgemeines Kraftsystem einwirkt, ist dann im Gleichgewicht, wenn sich alle wirkenden Kräfte und Momente aufheben. Mathematisch ausgedrückt:

**Eine Kräftegruppe ist im Gleichgewicht
wenn die Summe aller Kraftvektoren (3.8)
und die Summe aller Momente (3.9) Null sind.**

$$\underline{R} = \sum \underline{F}_i = 0 \quad \rightarrow \sum F_{ix} = 0 \quad \text{und} \quad \sum F_{iy} = 0 \quad (3.8)$$

$$M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)} = 0 \quad (3.9)$$

Beispiel 3-2 Gleichgewicht an einer gleichseitigen Sechseckscheibe

Eine gleichseitige Sechseckscheibe ist durch vier Kräfte belastet. Zu ermitteln sind Größe und Lage der Resultierenden R der vier Kräfte sowie eine Kraft P , die im Gleichgewicht mit R steht.

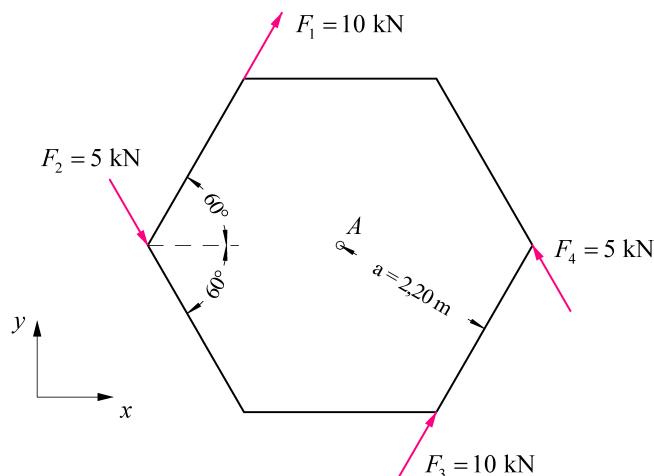


Abb. 3-8 Beispiel 3-2

$$\underline{F}_1 = \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 10 \cdot \cos 60^\circ \\ 10 \cdot \sin 60^\circ \end{bmatrix}; \quad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 5 \cdot \cos 60^\circ \\ -5 \cdot \sin 60^\circ \end{bmatrix} \quad \underline{F}_4 = -\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -5 \cdot \cos 60^\circ \\ 5 \cdot \sin 60^\circ \end{bmatrix}$$

Da $\underline{F}_4 = -\underline{F}_2$ ist, heben diese Kräfte sich bei der Berechnung der Resultierenden R auf.

$$\underline{R} = 2 \cdot \underline{F}_1 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 10 \cdot \cos 60^\circ \\ 10 \cdot \sin 60^\circ \end{bmatrix} = 20 \cdot \begin{bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{bmatrix} \rightarrow R = 2 \cdot 10 = 20 \text{ kN}$$

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \tan 60^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Bevor wir das resultierende Moment in Bezug auf A aufstellen, muss ein positives Vorzeichen für den Drehsinn festgelegt werden. Wir wählen den Gegenuhrzeigersinn als positiv:

$$M_R^{(A)} = \sum M_i^{(A)} = -F_1 \cdot a + F_2 \cdot a + \underbrace{F_3 \cdot a}_{=F_1} + \underbrace{F_4 \cdot a}_{=F_2} = 2 \cdot F_2 \cdot a$$

$$M_R^{(A)} = 2 \cdot 5 \cdot 2,2 = 22 \text{ kNm}$$

$$h = \left| \frac{M_R^{(A)}}{R} \right| = \frac{22}{20} = 1,10 \text{ m}$$

Das Ergebnis ist in Abb. 3-9 maßstäblich eingezeichnet. Es bedeutet: die Kräfte F_1 bis F_4 lassen sich durch die Resultierende R ersetzen. Um den Körper ins Gleichgewicht zu bringen, muss eine Kraft P wirken, die mit gleicher Größe in entgegengesetzter Richtung wirkt wie R . Das heißt, dass die Kraft P im Gleichgewicht steht mit den Kräften F_1 bis F_4 .

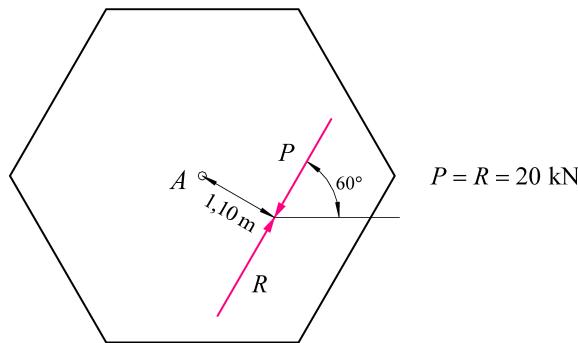


Abb. 3-9 Resultierende Kraft R und Gleichgewichtskraft P

4 Lagerreaktionen

4.1 Elemente von Tragwerken

In dieser Lehrveranstaltung werden nur Tragwerke behandelt, die aus Balken oder Stäben bestehen. Aus dem täglichen Leben sind diese Begriffe bekannt. In der Technischen Mechanik werden den Begriffen *Stab* und *Balken* jedoch weitere, mechanische Eigenschaften zugeordnet, die im Folgenden beschrieben werden.

Kräfte und Momente an einem Schnittufer eines Stabes oder Balkens bezeichnet man als *Schnittgrößen*.

Ein *Stab* ist ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Länge. Außerdem überträgt ein Stab ausschließlich Zug- oder Druckkräfte in Richtung seiner Stabachse. Diese Kraft wird als *Stabkraft* bezeichnet oder als *Normalkraft*, da sie senkrecht (normal) zur Querschnittsfläche wirkt. Abb. 4-1 zeigt die Stabkräfte, die im ebenen Fall an einem Stab wirken können. Einen Sonderfall eines Stabes stellt das *Seil* dar, das nur Zugkräfte aufnehmen kann.

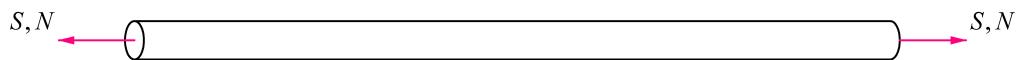


Abb. 4-1 Stab

Ein *Balken* ist ebenfalls ein Bauteil, dessen Querschnittsabmessungen sehr viel kleiner sind als seine Länge. Im Gegensatz zum Stab überträgt er Kräfte in Richtung zur Stabachse und quer dazu, sowie Biegemomente. Abb. 4-2 zeigt die Kräfte und Momente, die im ebenen Fall an einem Balken wirken können. N steht für "Normalkraft", Q für "Querkraft" (quer zur Stabachse) und M für "Moment".

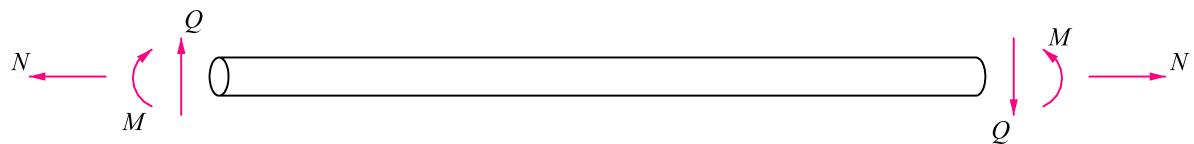


Abb. 4-2 Balken mit Schnittkräften in der Ebene

Einen gekrümmten Balken nennt man *Bogen*.

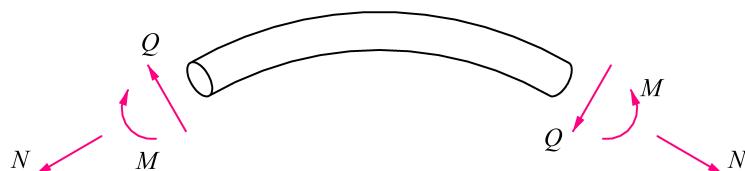


Abb. 4-3 Bogen mit Schnittkräften in der Ebene

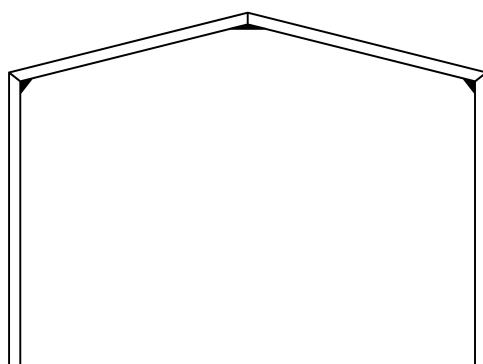


Abb. 4-4 Rahmen

Tragwerke aus starr miteinander verbundenen abgewinkelten Balken heißen *Rahmen*.

4.2 Gelenke

Gelenke verbinden Elemente von Tragwerken (Stäbe oder Balken), "schalten" jedoch eine oder mehrere Schnittgrößen aus. Tab. 4-1 zeigt die Zuordnung der Symbole.

Gelenk-Symbol	Bezeichnung	Bedeutung
	Momentengelenk 0- der kurz Gelenk	$M = 0$, an dieser Stelle ist das Biegemoment Null
	Querkraftgelenk	$Q = 0$, an dieser Stelle ist die Querkraft Null
	Normalkraftgelenk	$N = 0$, an dieser Stelle ist die Normalkraft Null

Tab. 4-1 Gelenk-Symbole und ihre mechanische Bedeutung

4.3 Lagertypen

Mit Lagern ist ein Tragwerk "an den Rest der Welt" angeschlossen. Zum Beispiel an den festen Untergrund, einen anderen Körper oder an ein weiteres Tragwerk, das nicht betrachtet wird. Lager unterscheiden sich nach der Art und Anzahl der Kräfte und Momente, die an dieser Stelle übertragen werden können. Für ebene Systeme sind drei Typen von Lagern in Tab. 4-2 erklärt.

Auflager-Symbol	Bezeichnung	Auflagerkräfte/Auflagermomente
	Gleitlager, 1-wertiges Lager	
	Festlager, 2-wertiges Lager	
	Einspannung, 3-wertiges Lager	

Tab. 4-2 Auflager-Symbole und ihre mechanische Bedeutung

In den ersten beiden Zeilen der Tab. 4-2 sind jeweils in der linken Spalte die beiden alternativen Symbole für Gleitlager und Festlager gezeigt. Die einfacheren Symbole werden oft in Skizzen verwendet.

Aus der Kombination der Einspannung mit einem Normal- oder Querkraftgelenk lassen sich weitere 2-wertige Auflagertypen ableiten.

4.4 Statische Bestimmtheit einteiliger Tragwerke

Tragwerke, die wir hier betrachten, müssen so gelagert sein, dass sie sich nicht bewegen können, d.h., dass sie *nicht kinematisch* gelagert sind. Zur Bestimmung der Lagerreaktionen stehen uns die Gleichgewichtsbedingungen der Gleichungen (3.8) und (3.9) zur Verfügung. Für den ebenen Fall sind dies drei Gleichgewichtsbedingungen, aus denen wir drei unabhängige Gleichungen formulieren können. Dies reicht aus, um drei unbekannte Lagerreaktionen bestimmen zu können.

Ein starrer Körper ist genau dann *statisch bestimmt* und *nicht kinematisch* gelagert, wenn folgende Lagerreaktionen auftreten können:

- drei Kräfte, die nicht parallel und nicht zentral sind, oder
- zwei Kräfte und ein Moment, wobei die Kräfte nicht parallel sind.



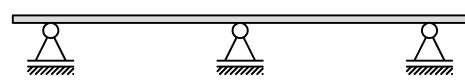
a) statisch bestimmt, nicht kinematisch



b) statisch bestimmt, nicht kinematisch



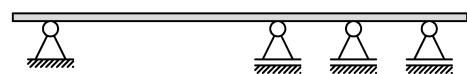
c) statisch bestimmt, nicht kinematisch



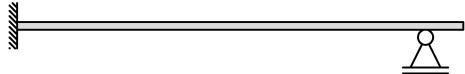
d) statisch unbestimmt, kinematisch!

Abb. 4-5 Beispiele für Lagerungen mit drei unbekannten Lagerreaktionen

Die Beispiele a, b und c in Abb. 4-5 zeigen statische Systeme, bei denen jeweils drei unbekannte Lagerreaktionen auftreten. Das System in Beispiel Abb. 4-5d hat ebenfalls drei unbekannte Lagerkräfte, diese sind jedoch alle parallel.



a) 2-fach statisch unbestimmt



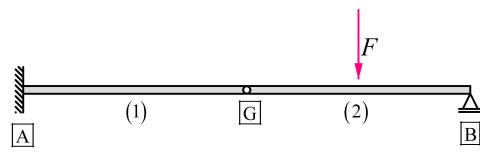
b) 1-fach statisch unbestimmt

Abb. 4-6 Beispiele für statisch unbestimmte Lagerungen

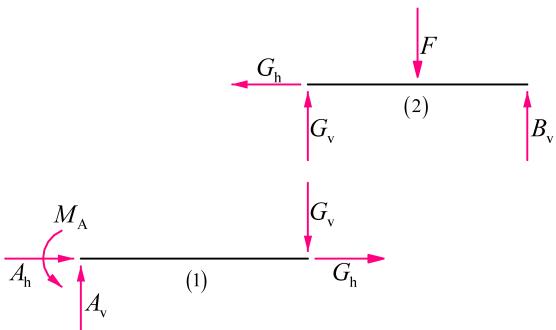
In den Beispielen a und b der Abb. 4-6 sind mehr als drei unbekannte Lagerreaktionen. Diese lassen sich mit den Gleichgewichtsbedingungen nicht berechnen. Die Berechnung solcher Systeme ist jedoch mit anderen Methoden möglich.

4.5 Statische Bestimmtheit mehrteiliger Tragwerke

Tragwerke bestehen oft aus mehreren Teilen, die durch Gelenke miteinander verbunden sind. Mehrteilige Tragwerke erfordern in der Regel eine höhere Anzahl von Auflagerkräften/-momenten als einheitliche Tragwerke um eine nichtkinematische Lagerung herzustellen.



a)



b)

Abb. 4-7 Zweiteiliges Tragwerk

Am einfachen mehrteiligen Tragwerk in Abb. 4-7 soll hergeleitet werden, wie die statische Bestimmtheit beurteilt wird. Das Tragwerk besteht aus einem Kragbalken (1), an den am Punkt \boxed{G} mit einem Momentengelenk ($M = 0$) ein weiterer Balken (2) angeschlossen ist.

Zunächst wird das Tragwerk durch Trennung am Gelenk in zwei Teilsysteme (1) und (2) zerlegt. Jedes Teilsystem für sich ist statisch bestimmt und nichtkinematisch. Man beginnt mit der Berechnung am Teilsystem (2) und kann das Gelenk am Punkt \boxed{G} als zweiwertiges Auflager auffassen. Die unbekannten Lagerkräfte B_v , G_h und G_v werden berechnet. Als nächstes werden die drei Lagerreaktionen am Punkt \boxed{B} berechnet, wobei die aus Teilsystem (2) berechneten Gelenkkkräfte G_h und G_v als Belastung des Teilsystems (1) angesetzt werden. Die Auflagerkräfte sind also mit den Gleichgewichtsbedingungen berechenbar, d.h. das System ist statisch bestimmt.

Das Gesamtsystem hat vier unbekannte Auflagerreaktionen. Durch das Zerschneiden in die beiden Teilsysteme am Gelenk \boxed{G} entstehen zwei weitere unbekannte Kräfte G_h und G_v . Für jedes Teilsystem stehen drei Gleichungen zur Bestimmung von unbekannten Lagerkräften zur Verfügung. Wir können also bilanzieren:

Unbekannte: Lagerreaktionen $r = 4$, Gelenkkkräfte $g = 2$, insgesamt 6 Unbekannte

Gleichungen: Anzahl Teilsysteme $n = 2$, Gleichungen $3 \cdot n = 6$, insgesamt 6 Gleichungen.

Man kann also als Forderung für *statische Bestimmtheit bei mehrteiligen Systemen* formulieren:

$$r + g = 3 \cdot n \quad ! \quad (4.1)$$

r Anzahl der Lagerreaktionen

g Anzahl der unbekannten Gelenkkkräfte

n Anzahl der Teilsysteme

4.6 Berechnung von Lagerreaktionen

Die Berechnung von Lagerreaktionen wird anhand von Beispielen gezeigt.

Beispiel 4-1 Auflagerkräfte an einem Balken auf zwei Stützen

An einem einteiligen Tragwerk, bestehend aus einem horizontalen Balken, sollen die Reaktionen der Auflager an den Punkten \boxed{A} und \boxed{B} bestimmt werden.

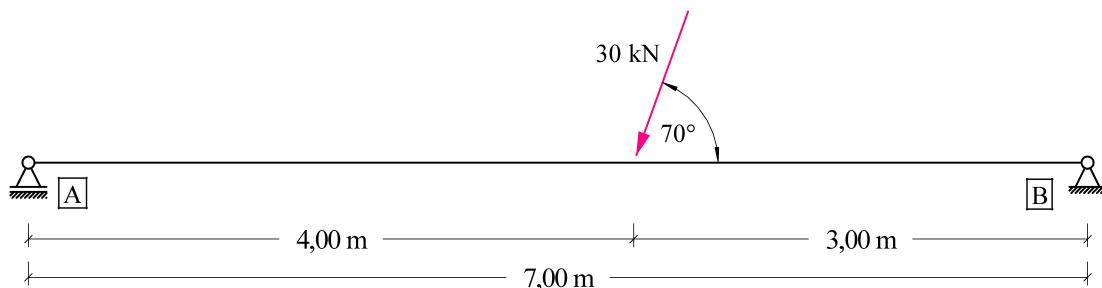


Abb. 4-8 Beispiel 4-1

Es wird ein Schnitt um das gesamte System geführt, ohne den Balken zu zerschneiden (Abb. 4-9). Die Auflager werden dabei geschnitten und die Lagerkräfte sind als Gleichgewichtskräfte anzusetzen. Außerdem wird die Einzellast von 30 kN ersetzt durch ihre horizontale und vertikale Teilkraft.

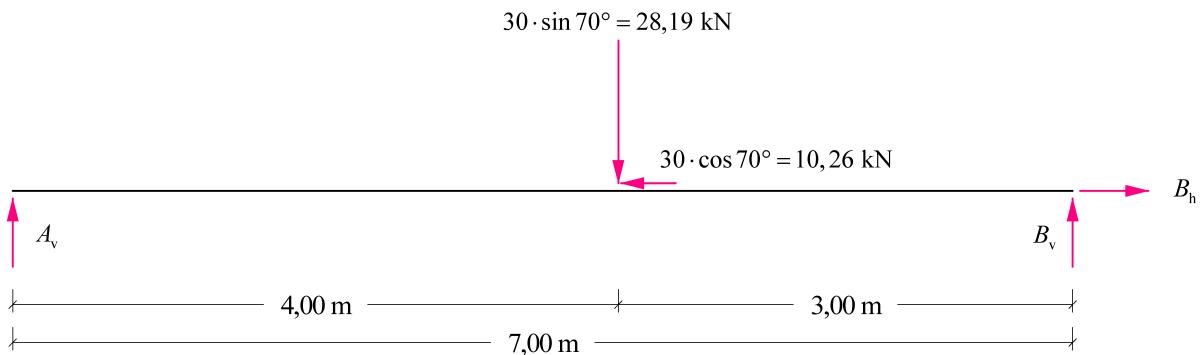


Abb. 4-9 Freigeschnittenes System

Für das freigeschnittene System Abb. 4-9 können die Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Es gibt keine feste Reihenfolge für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen, daher wird die Reihenfolge so gewählt, dass in den Gleichungen möglichst wenige Unbekannte auftreten. Anstatt der Kraftsummen in x- und y-Richtung werden Kraftsummen in horizontaler und vertikaler Richtung aufgestellt.

Für jede Gleichgewichtsbedingung müssen Vorzeichen festgelegt werden, die keinen Einfluss auf das Ergebnis haben. Wir verwenden immer folgende Vorzeichendefinition:

$\sum H$: Kräfte nach rechts wirkend sind positiv, nach links wirkend negativ,

$\sum V$: Kräfte nach unten wirkend sind positiv, nach oben wirkend negativ,

$\sum M$: Momente mit Drehsinn gegen den Uhrzeigersinn sind positiv, im Uhrzeigersinn negativ.

Gleichgewichtsbedingungen am freigeschnittenen System Abb. 4-9:

$$\sum H = 0 : -10,26 + B_h = 0$$

$$B_h = 10,26 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 : -28,19 \cdot 4 + B_v \cdot 7 = 0$$

$$B_v = 16,11 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : 28,19 - A_v - \underbrace{B_v}_{16,11} = 0$$

$$A_v = 12,08 \text{ kN}$$

Bisher nicht verwendete Gleichgewichtsbedingungen können zur Kontrolle der Ergebnisse dienen:

$$\sum M^{(B)} = 0 : -A_v \cdot 7 + 28,19 \cdot 3 = -12,08 \cdot 7 + 28,19 \cdot 3 = 0$$

$$0,01 \approx 0$$

Was bedeutet es, dass das Ergebnis der Kontrolle nicht genau zu Null wird? Wir haben mit maximal 4 signifikanten dezimalen Stellen gerechnet, bei unserer Größenordnung von Werten also mit 2 Stellen hinter dem Komma. Die Ungenauigkeit (0,01) befindet sich genau an dieser Stelle. Bei einer wesentlich exakteren Rechnung würde die Ungenauigkeit geringer und das Ergebnis der Kontrolle würde sich immer mehr der exakten Null annähern. Die Kontrolle ist also erfolgreich. Da sie jedoch nicht die Ergebnisse von B_v und B_h enthält, müssten weitere Kontrollen durchgeführt werden, die auch die Auflagerkräfte B_v und B_h einschließen.

Beispiel 4-2 Auflagerkräfte an einem Kragarm

An einem einteiligen Tragwerk, bestehend aus einem horizontalen Kragarm, an den ein vertikaler Kragarm anschließt, sollen die Reaktionen des Auflagers am Punkt **A** bestimmt werden.

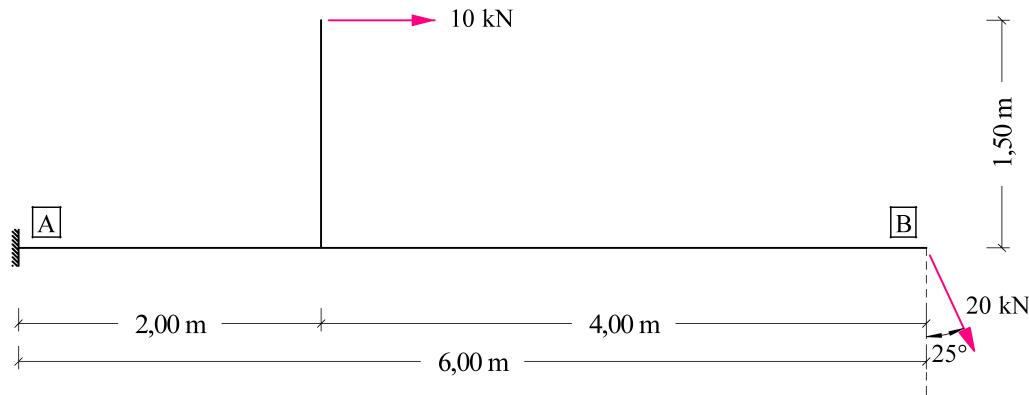


Abb. 4-10 Beispiel 4-2

Es wird ein Schnitt um das gesamte System geführt, ohne es zu zerschneiden (Abb. 4-11). Die Auflager werden dabei geschnitten und die Lagerkräfte und das Lagermoment sind als Gleichgewichtskräfte anzusetzen. Außerdem wird die Einzellast von 20 kN am rechten Ende ersetzt durch ihre horizontale und vertikale Teilkraft.

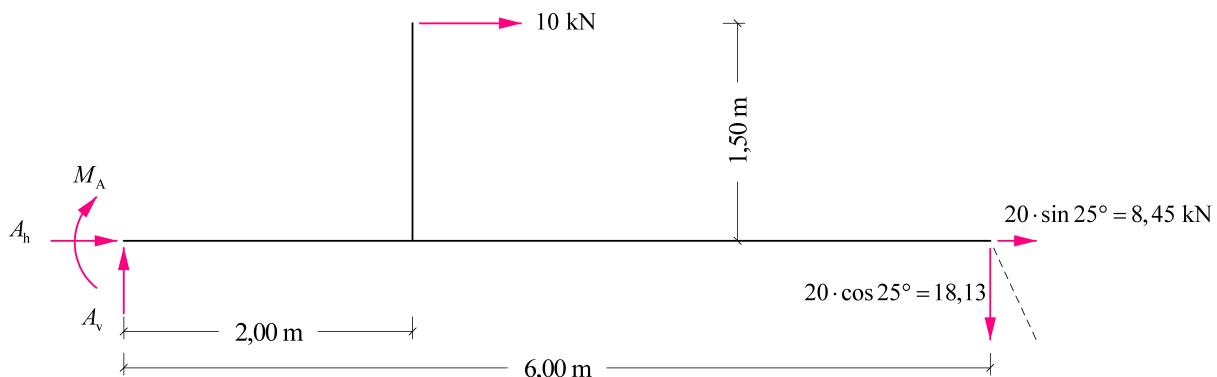


Abb. 4-11 Freigeschnittenes System

Bei der Lösung der Aufgabe verwenden wir die gleiche Vorzeichendefinition wie in Beispiel 4-1.

$$\sum H = 0: \quad A_h + 10 + 8,45 = 0 \\ A_h = -18,45 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 18,13 = 0 \\ A_v = 18,13 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -M_A - 10 \cdot 1,5 - 18,13 \cdot 6,0 = 0 \\ M_A = -123,76 \text{ kNm}$$

Kontrolle:

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad 123,76 - 18,13 \cdot 6 - 10 \cdot 1,5 = 123,76 - 108,78 - 15,00 = -0,02 \approx 0$$

Beispiel 4-3 Auflager- und Gelenkkräfte an einem zweiteiligen Tragwerk

Das Tragwerk besteht aus zwei Teilen, die durch ein Momentengelenk am Punkt **G** verbunden sind.

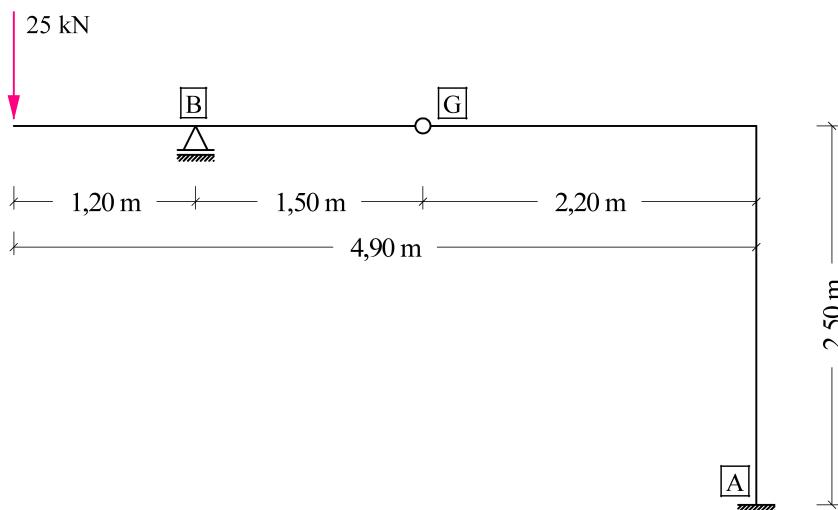


Abb. 4-12 Beispiel 4-3

Zunächst wird das Tragwerk durch Trennung am Gelenk in zwei Teilsysteme zerlegt (Abb. 4-13). Jedes Teilsystem für sich ist statisch bestimmt und nichtkinematisch.

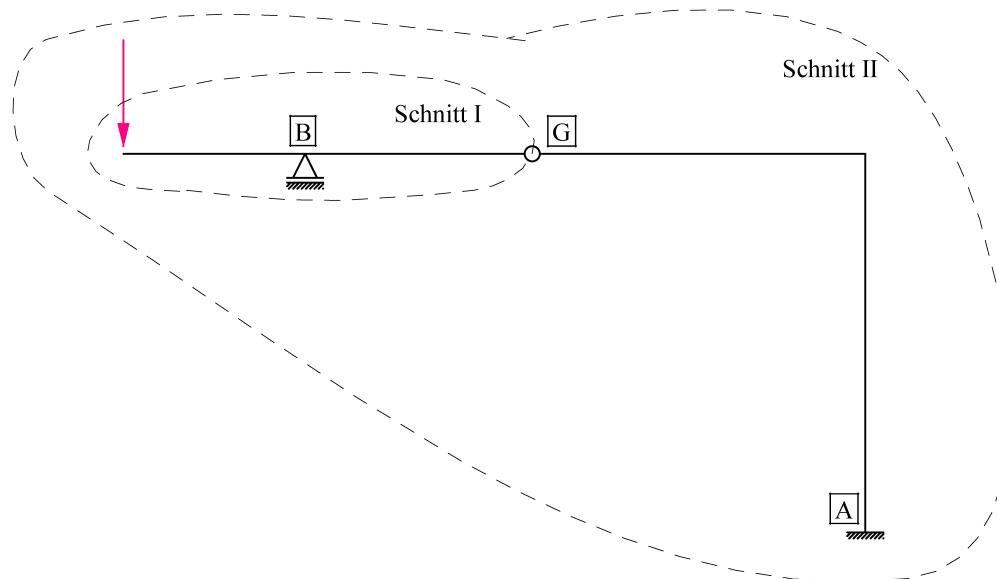


Abb. 4-13 Lage der Schnitte

Man beginnt mit der Berechnung am Teilsystem im Schnitt I (Abb. 4-14). Das Gelenk am Punkt **G** wird als zweiwertiges Auflager aufgefasst.

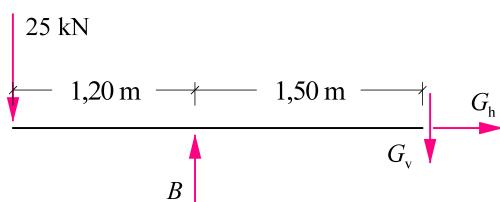


Abb. 4-14 Schnitt I

Die unbekannten Lagerkräfte B , G_h und G_v werden im Schnitt I berechnet.

$$\sum H = 0 : \quad G_h = 0$$

$$\sum M^{(G)} = 0 : \quad 25 \cdot (1,2 + 1,5) - B \cdot 1,5 = 0$$

$$B = 45 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : \quad 25 - 45 + G_v = 0$$

$$G_v = 20 \text{ kN}$$

Die Berechnung wird fortgesetzt im Schnitt II (Schnitt um das Gesamtsystem, Abb. 4-15).

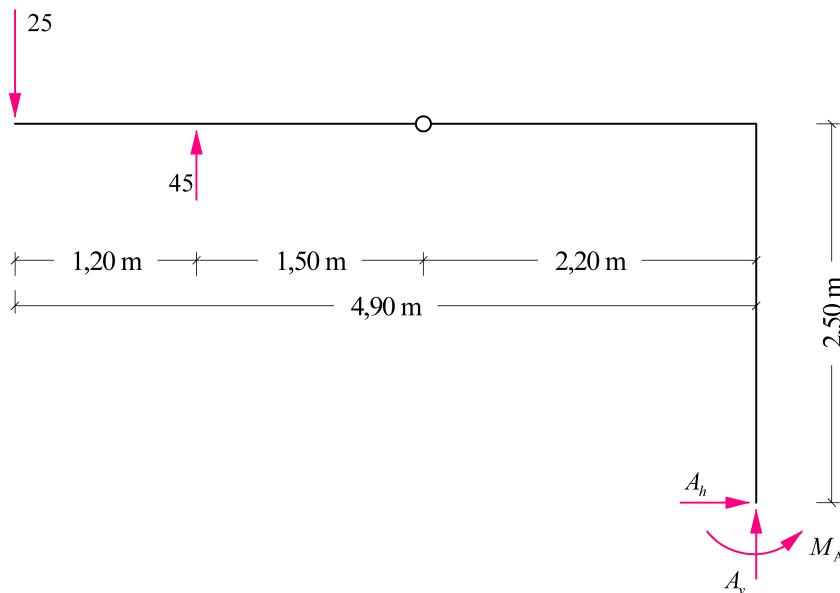


Abb. 4-15 Schnitt II um das Gesamtsystem

$$\sum H = 0 : \quad A_h = 0$$

$$\sum V = 0 : \quad 25 - 45 - A_v = 0$$

$$A_v = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 : \quad 25 \cdot 4,9 - 45 \cdot 3,7 + M_A = 0$$

$$M_A = +44 \text{ kNm}$$

Kontrolle:

$$\sum M^{(G)} = 0 : \quad \underbrace{+25 \cdot 2,7}_{+67,5} \underbrace{- 45 \cdot 1,5}_{-67,5} \underbrace{- (-20) \cdot 2,2}_{+44} - 44 = 0$$

Beispiel 4-4 Auflager- und Gelenkkräfte an einer Konsolkonstruktion

Das Tragwerk besteht aus zwei Teilen, die durch ein Momentengelenk am Punkt **G** verbunden sind. Zu beachten ist, dass der obere horizontale Balken nicht durch das Momentengelenk unterbrochen wird.

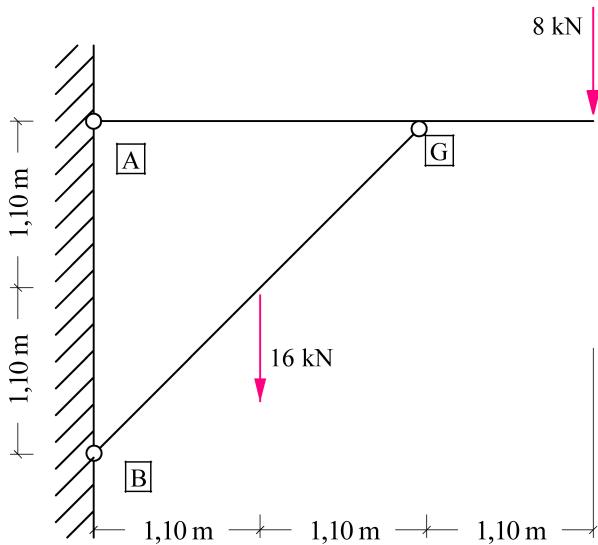


Abb. 4-16 Beispiel 4-4

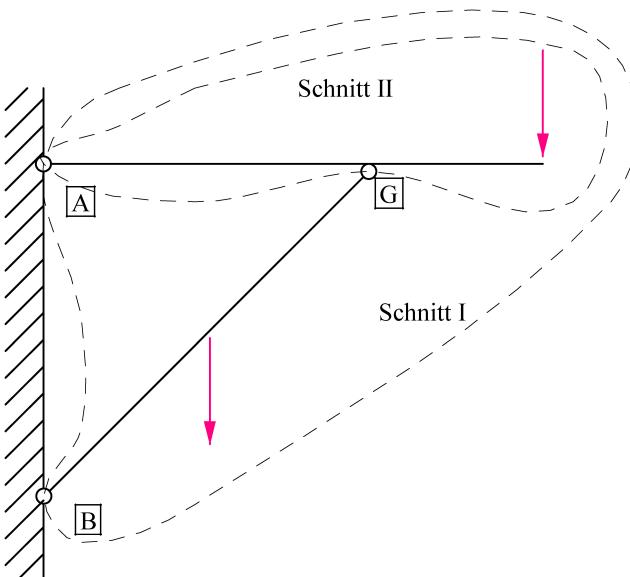


Abb. 4-17 Schnittführung

Im ersten Schritt wird ein Schnitt um das Gesamtsystem geführt (Schnitt I, Abb. 4-17).

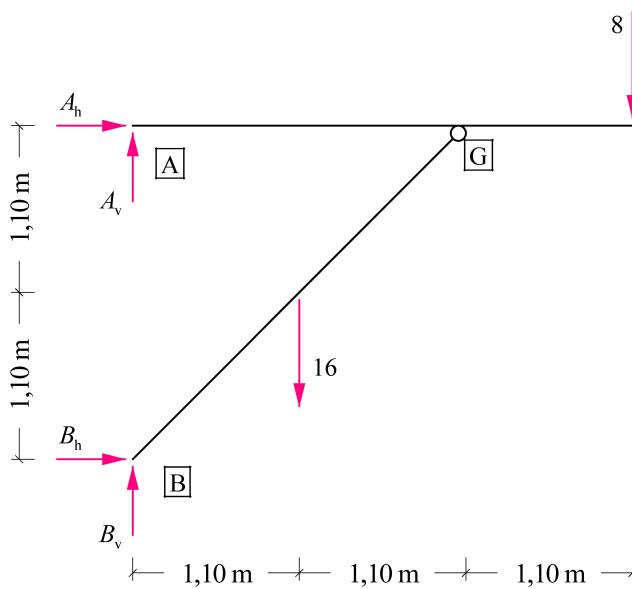


Abb. 4-18 Schnitt I

$$\sum M^{(A)} = 0 : 0 = B_h \cdot 2,2 - 16 \cdot 1,1 - 8 \cdot 3,3$$

$$B_h = 20 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 : A_h + B_h = 0$$

$$A_h = -B_h = -20 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : 0 = -A_v - B_v + 16 + 8$$

$$B_v = -A_v + 24 \quad (1)$$

Aus $\sum V = 0$ wird zunächst nur Gleichung (1) mit zwei Unbekannten gewonnen. Im nächsten Berechnungsschritt wird Schnitt II betrachtet (Abb. 4-19).

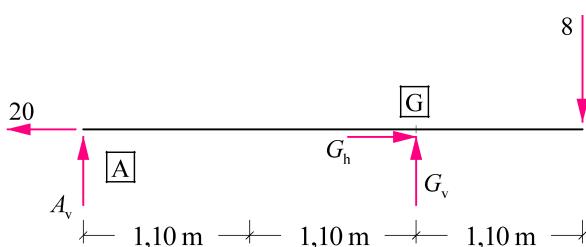


Abb. 4-19 Schnitt II

mit Berechnung der Gelenkkräfte:

$$\sum H = 0 : -20 + G_h = 0$$

$$G_h = +20 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 : -8 \cdot 3,3 + G_v \cdot 2,2 = 0$$

$$G_v = \frac{3,3}{2,2} \cdot 8 = +12 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : 0 = -A_v - G_v + 8$$

$$A_v = -G_v + 8 = -12 + 8 = -4 \text{ kN}$$

schneller ohne Berechnung der Gelenkkräfte:

$$\sum M^{(G)} = 0 : -8 \cdot 1,1 - A_v \cdot 2,2 = 0$$

$$A_v = -\frac{1,1}{2,2} \cdot 8 = -4 \text{ kN}$$

Da nun ein Ergebnis für A_v vorliegt, kann Gleichung (1) gelöst werden:

$$B_v = -A_v + 16 + 8 = 4 + 16 + 8 = 28 \text{ kN}$$

Kontrolle:

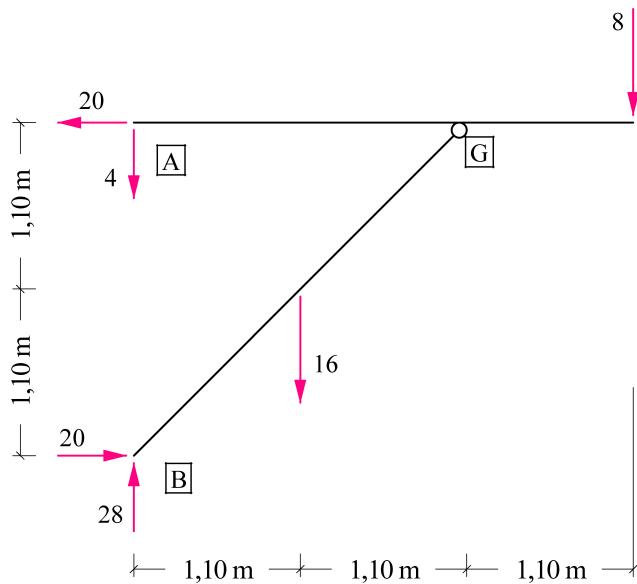


Abb. 4-20 Kontrolle

$$\sum M^{(G)} = 0 : +4 \cdot 2, 2 - 8 \cdot 1, 1 + 16 \cdot 1, 1 + 20 \cdot 2, 2 - 28 \cdot 2, 2 = 0$$

5 Fachwerke

Ein Tragwerk, das nur aus geraden Stäben aufgebaut ist, wird als *Fachwerk* bezeichnet. Die Stäbe sind an ihren Enden gelenkig (Momentengelenke) miteinander verbunden und Kräfte greifen ausschließlich an diesen Verbindungsstellen, den *Knoten* an. Fachwerke können ebene oder räumliche Tragwerke bilden.

Unter den o.g. Voraussetzungen treten in den Stäben von Fachwerken ausschließlich Zug- oder Druckkräfte auf. Querkräfte und Biegemomente sind gleich Null. Gegenüber realen Tragwerken stellt diese Annahme eine Idealisierung dar, da z.B. das Eigengewicht der Stäbe verteilt ist und daher nicht ausschließlich Kräfte an den Knotenpunkten auftreten. Außerdem können bei realen Knotenkonstruktionen auch Momente übertragen werden. Die Berechnungsannahme eines Fachwerkes ist also bei realen Tragwerken umsichtig vorzunehmen.

5.1 Statische Bestimmtheit von Fachwerken

Wir wollen uns hier auf die ebenen Fachwerke beschränken. Der *Nachweis der statischen Bestimmtheit* soll an einem Beispiel abgeleitet werden. Das Fachwerk in Abb. 5-1 enthält die typischen Bezeichnungen. Die Knotenpunkte sind durchnummieriert von Knoten **[1]** bis **[5]**. Die Stäbe werden in Kategorien nummeriert.

"O" steht für Stäbe des Obergurtes,
 "U" für Stäbe des Untergurtes,
 "D" für Diagonalen und
 "V" für Vertikalstäbe.

Falls sich Stäbe nicht in diese Kategorien einreihen lassen, dann werden sie z.B. mit "S" bezeichnet.

Das Fachwerk in Abb. 5-1 besteht aus 11 Stäben, die in 7 Knoten miteinander verbunden sind. Zur Ermittlung der Stabkräfte und der Lagerkräfte könnte man wie folgt vorgehen: wir schneiden jeden Knoten frei und stellen jeweils 2 Kräftegleichgewichtsbedingungen auf, z.B. $\sum H$ und $\sum V$. Bei 7 Knoten würden wir also $2 \cdot 7 = 14$ Gleichungen bekommen. Hieraus können 14 Unbekannte bestimmt werden.

Wie viele Unbekannte sind im Fachwerk Abb. 5-1 enthalten? Unbekannt sind 11 Stabkräfte und 3 Auflagerkräfte also $11 + 3 = 14$ Unbekannte. Das ließe sich also lösen.

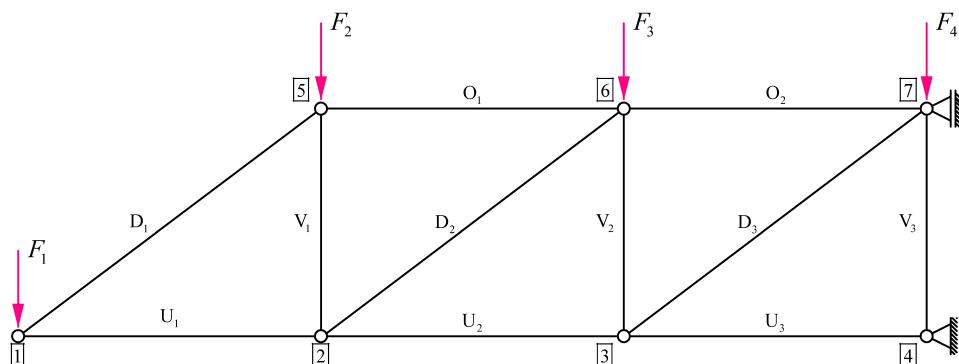


Abb. 5-1 Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk mit statisch bestimmter Lagerung

Die abgeleitete Forderung für die *statische Bestimmtheit* eines ebenen Fachwerks kann also wie folgt formuliert werden:

$$s + r = 2 \cdot k \quad (5.1)$$

s Anzahl der Stäbe

r Anzahl der Lagerreaktionen

k Anzahl der Knoten

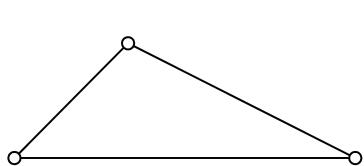
5.2 Aufbau eines statisch bestimmten Fachwerks

Die hier behandelten Fachwerke sollen statisch bestimmt und nicht beweglich sein (nicht kinematisch). Um diese Bedingungen zu prüfen stehen einfache Methoden zur Verfügung.

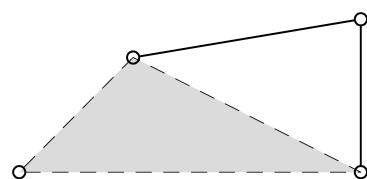
1. Bildungsgesetz

Das Fachwerk ist aus Dreiecken aufgebaut, die durch jeweils 3 Knoten und 3 Stäbe gebildet werden.

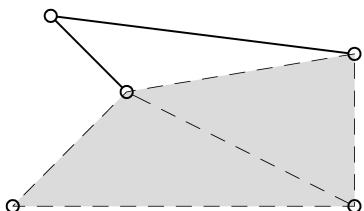
Die Stabachsen eines jeweiligen Dreiecks dürfen nicht auf einer Geraden liegen.



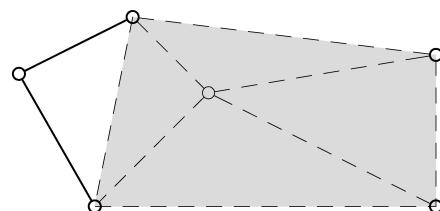
a) $k = 3 \quad s = 3$



b) $k = 4 \quad s = 5$



c) $k = 5 \quad s = 7$



d) $k = 6 \quad s = 9$

Abb. 5-2 Aufbau eines Fachwerks nach dem 1. Bildungsgesetz

Der Aufbau des Fachwerks ist in Abb. 5-2 in den Schritten a) bis d) geführt. Das erste Fachwerk in Abb. 5-2a besteht aus 3 Knoten und 3 Stäben. In jedem weiteren Teilschritt kommen jeweils 1 Knoten und 2 Stäbe hinzu. Es gilt also die Beziehung:

$$s = 2 \cdot k - 3 \quad (5.2)$$

s Anzahl der Stäbe

k Anzahl der Knoten

2. Bildungsgesetz

Zwei nach dem 1. Bildungsgesetz aufgebaute Fachwerke können durch drei Stäbe verbunden werden, die nicht alle parallel sind und deren Achsen sich nicht in einem Punkt schneiden (Abb. 5-3a). Alternativ können zwei solche Fachwerke auch über einen gemeinsamen Knoten und einen zusätzlichen Stab verbunden werden (Abb. 5-3b).

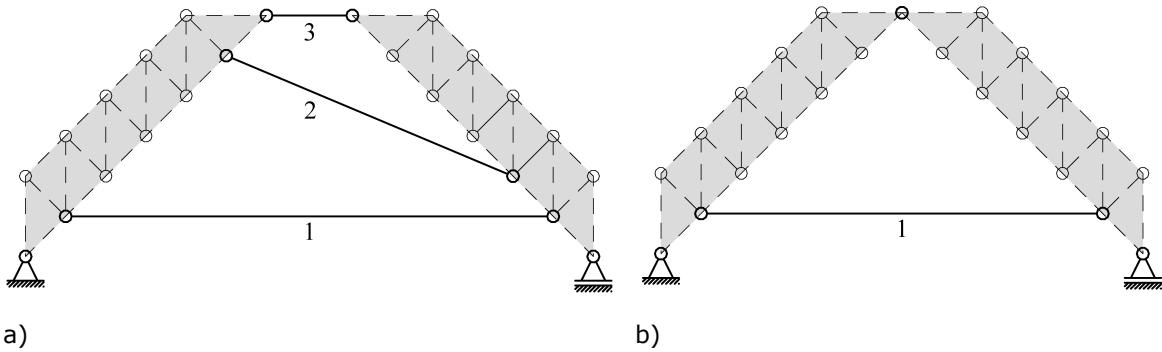


Abb. 5-3 Aufbau eines Fachwerks nach dem 2. Bildungsgesetz

5.3 Ermittlung der Stabkräfte nach dem Knotenpunktverfahren

Das Knotenpunktverfahren zur Bestimmung der Stabkräfte wird wie folgt angewendet:

- alle Knoten des Fachwerks werden nacheinander freigeschnitten
- an jedem freigeschnittenen Knoten werden die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.

In Fachwerken können an den Knoten zwei oder mehr Stäbe angeschlossen sein. Da bei jedem Knotenschnitt in der Ebene 2 Gleichgewichtsbedingungen (z.B. $\sum H$ und $\sum V$) formuliert werden können, sind auch nur jeweils 2 unbekannte Stabkräfte ermittelbar, wenn die Aufstellung und Lösung eines Gleichungssystems vermieden werden soll. In der Regel kann die Reihenfolge der Abarbeitung der Knotenschnitte so gewählt werden, dass die Aufstellung eines Gleichungssystems nicht erforderlich wird.

An der Abtragung der Lasten in Fachwerken sind nicht immer alle Stäbe beteiligt. Manche Stäbe sind unbelastet, d.h. ihre Stabkräfte sind gleich Null und man bezeichnet sie als *Nullstäbe*. Es ist nicht unbedingt erforderlich, ohne Berechnung zu erkennen, welche Stäbe Nullstäbe sind. Es gibt jedoch einige Regeln, nach denen man durch "scharfes Hinsehen" Nullstäbe erkennen kann, was die Berechnung erleichtert. Hierzu die drei folgenden Regeln:

- a) Sind an einem unbelasteten Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht die gleiche Richtung haben, dann sind diese beiden Stäbe Nullstäbe (Abb. 5-4a).
- b) Zeigt an einem Knoten mit zwei Stäben die Last in Richtung eines Stabes, dann ist der Betrag der Stabkraft gleich dem Betrag der Last. Der andere Stab ist ein Nullstab (Abb. 5-4b).
- c) Haben an einem unbelasteten Knoten von drei Stäben zwei die gleiche Richtung, dann ist der dritte Stab ein Nullstab (Abb. 5-4c).

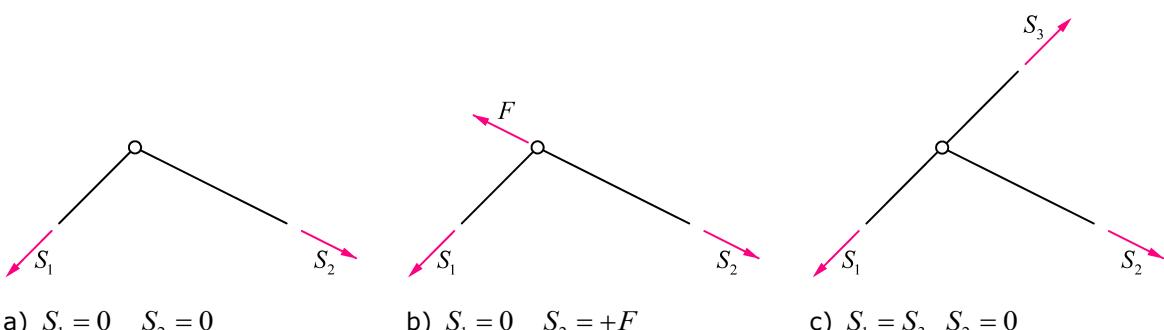


Abb. 5-4 Erkennung von Nullstäben

Die Berechnung nach dem Knotenpunktverfahren wird anhand eines Beispiels gezeigt.

Beispiel 5-1 Stabkräfte eines parallelgurtigen Fachwerkträgers, Knotenpunktverfahren

Ein parallelgurtiger Fachwerkträger (Abb. 5-5) ist als Balken auf zwei Stützen gelagert.

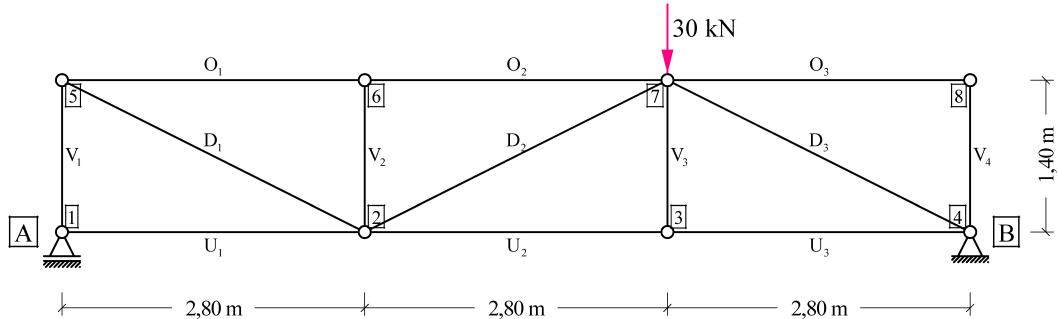


Abb. 5-5

Beispiel 5-1

Im ersten Schritt bestimmen wir Auflagerkräfte und Nullstäbe. Zur Bestimmung der Auflagerkräfte wird das Gesamtsystem freigeschnitten (Abb. 5-6).

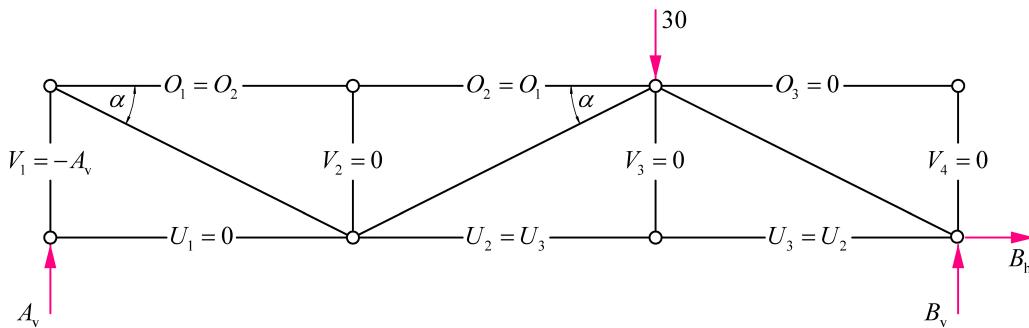


Abb. 5-6 Freigeschnittenes System

Auflagerkräfte:

$$\sum M^B = 0 : -A_v \cdot 3 \cdot 2,8 + 30 \cdot 2,8 = 0$$

$$A_v = 10 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : B_v = 20 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0 : B_h = 0$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1,40}{2,80}\right) = 26,6^\circ$$

Nullstäbe werden wie folgt erkannt:

$$O_3 = 0 \quad \text{und} \quad V_4 = 0 \quad \text{nach Regel a)}$$

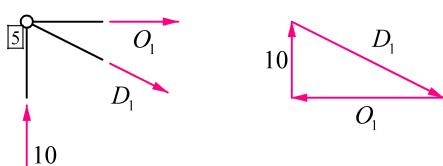
$$U_1 = 0 \quad \text{und} \quad V_1 = -A_v \quad \text{nach Regel b)}$$

$$V_2 = 0 \quad \text{und} \quad O_1 = O_2 \quad \text{nach Regel c)}$$

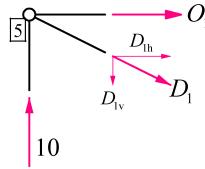
$$V_3 = 0 \quad \text{und} \quad U_2 = U_3 \quad \text{nach Regel c)}$$

Somit sind uns die Stabkräfte in 7 von 13 Stäben schon bekannt. Die restlichen 6 Stabkräfte werden durch 3 Knotenschnitte und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Hierbei wählen wir die Reihenfolge der Knotenschnitte so, dass jeweils nur maximal 2 unbekannte Stabkräfte auftreten.

Knotenschnitt bei **[5]**:

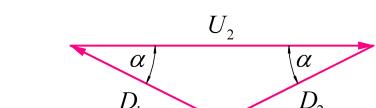
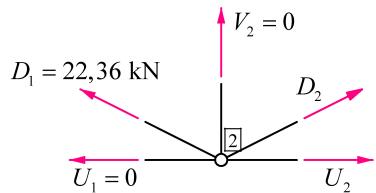


Alternativ könnten wir auch mit den horizontalen und vertikalen Komponenten der Kräfte rechnen:



$$\begin{aligned}\sum V = 0: \quad D_{1v} &= +10 \text{ kN} \\ \frac{D_{1h}}{D_{1v}} &= \frac{2,80}{1,40} \rightarrow D_{1h} = 2 \cdot D_{1v} = +20 \text{ kN} \\ D_l &= \sqrt{10^2 + 20^2} = +22,36 \text{ kN} \\ \sum H = 0: \quad O_1 &= -D_{1h} = -20 \text{ kN}\end{aligned}$$

Knotenschnitt bei **[2]**:

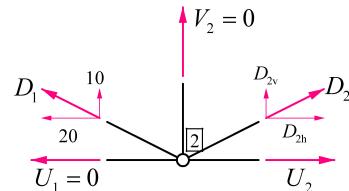


$$|D_2| = |D_1| \rightarrow D_2 = -22,36 \text{ kN}$$

$$|U_2| = 2 \cdot |D_1| \cdot \cos \alpha$$

$$U_2 = 2 \cdot 22,36 \cdot \cos 26,6^\circ = +40 \text{ kN} \text{ (Zug)}$$

oder:



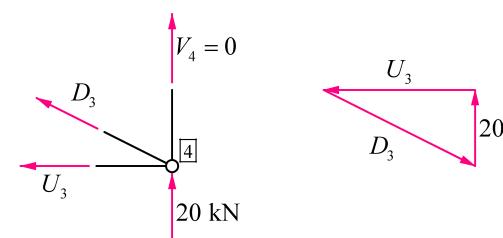
$$\sum V = 0: \quad D_{2v} = -10 \text{ kN}$$

$$\frac{D_{2h}}{D_{2v}} = \frac{2,80}{1,40} \rightarrow D_{2h} = 2 \cdot D_{2v} = -20 \text{ kN}$$

$$D_2 = -\sqrt{10^2 + 20^2} = -22,36 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0: \quad U_2 = +40 \text{ kN}$$

Knotenschnitt bei **[4]**:

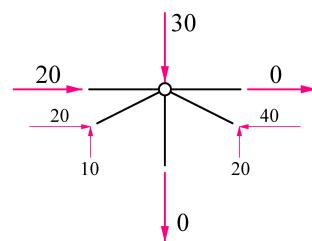
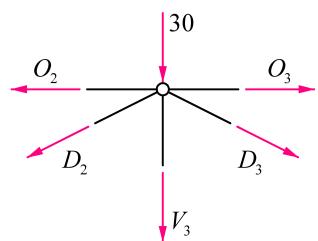


$$\frac{|U_3|}{20 \text{ kN}} = \frac{2,80}{1,40} \rightarrow U_3 = +40 \text{ kN}$$

$$D_3 = \sqrt{20^2 + 40^2} = -44,72 \text{ kN}$$

Kontrolle:

Wir schneiden den Knoten **[7]** frei, für den wir noch keine Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt haben. Dort tragen wir die Ergebnisse an und überprüfen das Gleichgewicht.



Alle horizontalen und vertikalen Kräfte addieren sich zu Null, d.h. die Kontrolle ist erfolgreich.

Zusammenstellung der Ergebnisse:

	1	2	3	4
U	0	+40	+40	
O	-20	-20	0	
V	-10	0	0	0
D	+22,36	-22,36	-44,72	

+ : Zug / - : Druck

5.4 Ermittlung der Stabkräfte nach dem Ritterschen Schnittverfahren

Zur Ermittlung einzelner Stabkräfte kann es insbesondere in Fachwerken aus vielen Stäben mühselig sein, nach dem Knotenpunktverfahren zu rechnen. Hier wird besser das Schnittverfahren nach Ritter eingesetzt:

- das Fachwerk wird in zwei Teile geschnitten,
- der Schnitt erfolgt durch *drei* Stäbe oder durch *einen* Stab und ein Gelenk.

Zur Verdeutlichung betrachten wir das gleiche Fachwerk wie zuvor (Abb. 5-7 wie Abb. 5-1).

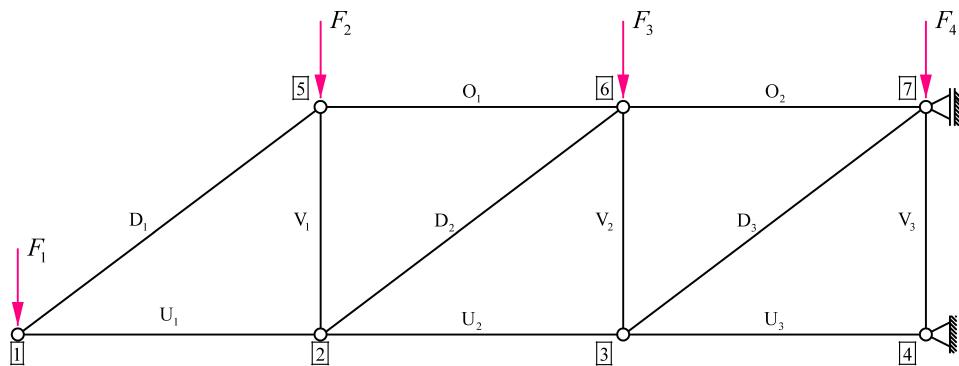


Abb. 5-7 Statisch bestimmtes ebenes Fachwerk mit statisch bestimmter Lagerung

Dieses Fachwerk schneiden wir in zwei Teile:

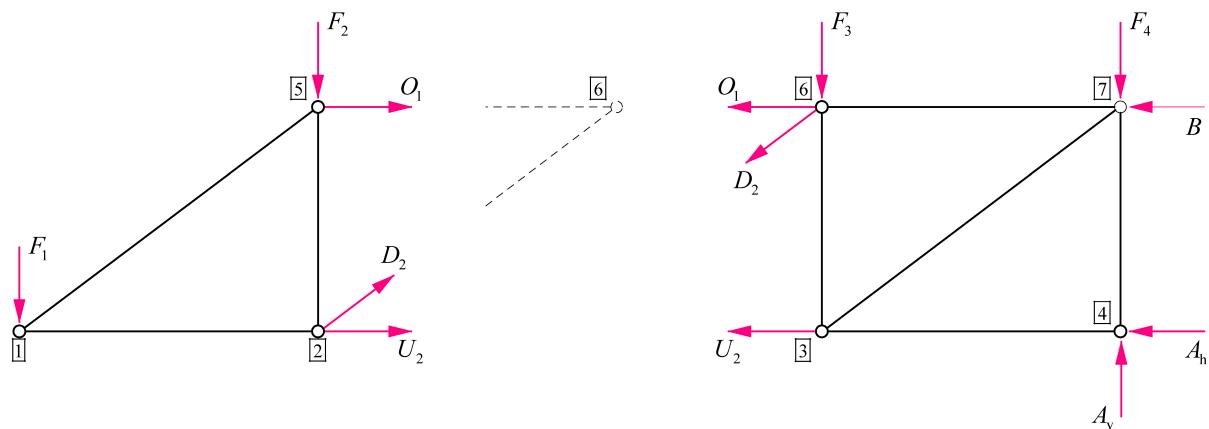


Abb. 5-8 Ritterscher Schnitt

Sowohl das linke Teilsystem als auch das rechte müssen für sich im Gleichgewicht sein. Wir können also durch Anwendung der drei Gleichgewichtsbedingungen die drei unbekannten Stabkräfte O_1 ,

D_2 und U_2 ermitteln. Wenn wir die Aufstellung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten vermeiden wollen, ist es sinnvoll mit Momentengleichungen zu beginnen. In diesem Beispiel wäre folgende Reihenfolge bequem:

$$\sum M^{(2)} \text{ liefert } O_1, \sum M^{(6)} \text{ liefert } U_2, \sum V \text{ liefert } D_{2v}, \sum H \text{ liefert } D_{2h}, D_2 = \sqrt{D_{2v}^2 + D_{2h}^2}.$$

Die Berechnung lässt sich analog auch am rechten Teilsystem durchführen, wobei hier zuvor die Auflagerkräfte bestimmt werden müssen.

Beispiel 5-2 Stabkräfte eines parallelgurtigen Fachwerkträgers, Rittersches Schnittverfahren

Es sollen alle Stabkräfte des Ober- und Untergurtes sowie alle Stabkräfte in den Diagonalen berechnet werden. Dies entspricht eigentlich nicht dem bevorzugten Anwendungsgebiet für den Ritterschen Schnitt, da dieses Verfahren angewendet wird, wenn nur einzelne Stabkräfte zu bestimmen sind (also z.B. nur O_2, D_2, U_2). Zur besseren Übung wird das Verfahren jedoch dreimal angewendet.

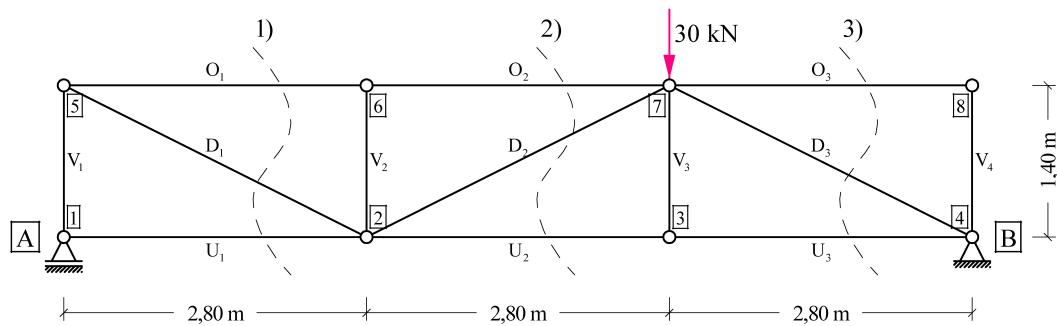
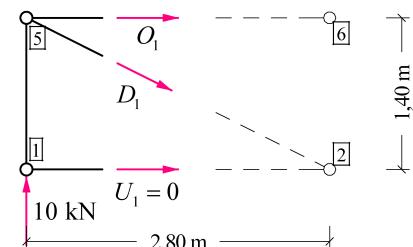


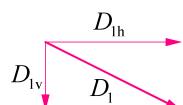
Abb. 5-9 Beispiel 5-2

In Abb. 5-9 sind bereits die drei Schnittlinien für die Ritterschen Schnitte eingezeichnet und mit 1-3 nummeriert.

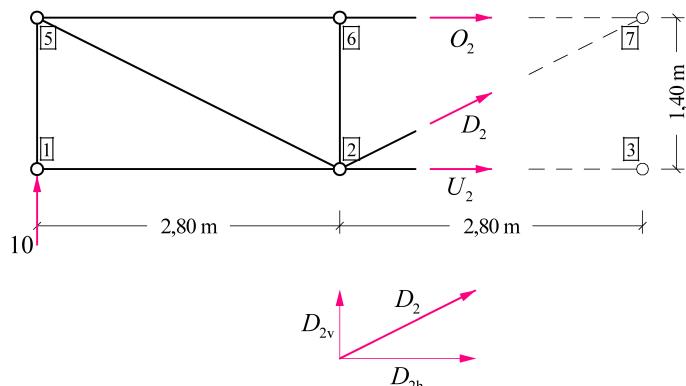
Schnitt 1: Gleichgewichtsbedingungen für das linke Teilsystem



$$\begin{aligned} \sum M^{(5)} = 0 : U_1 &= 0 \\ \sum M^{(2)} = 0 : -10 \cdot 2,8 - O_1 \cdot 1,4 &= 0 \rightarrow O_1 = -20 \text{ kN} \\ \sum V = 0 : D_{1v} &= +10 \text{ kN} \\ \text{Geometrie: } D_{1h} &= 2D_{1v} = +20 \text{ kN} \\ D_1 &= \sqrt{10^2 + 20^2} = +22,36 \text{ kN} \end{aligned}$$



Schnitt 2: Gleichgewichtsbedingungen für das linke Teilsystem



$$\sum M^{(7)} = 0: -10 \cdot 5,6 + U_2 \cdot 1,4 = 0 \rightarrow U_2 = +40 \text{ kN}$$

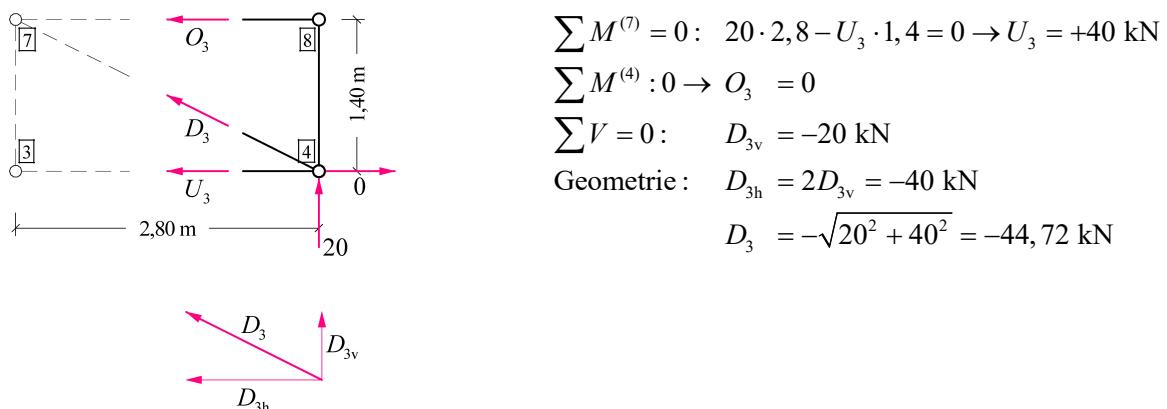
$$\sum M^{(2)} = 0: 0 = -10 \cdot 2,8 - O_2 \cdot 1,4 \rightarrow O_2 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: D_{2v} = -10 \text{ kN}$$

$$\text{Geometrie: } D_{2h} = 2 \cdot D_{2v} = -20 \text{ kN}$$

$$D_2 = -\sqrt{10^2 + 20^2} = -22,36 \text{ kN}$$

Schnitt 3: Gleichgewichtsbedingungen für das rechte Teilsystem



$$\sum M^{(7)} = 0: 20 \cdot 2,8 - U_3 \cdot 1,4 = 0 \rightarrow U_3 = +40 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(4)} = 0 \rightarrow O_3 = 0$$

$$\sum V = 0: D_{3v} = -20 \text{ kN}$$

$$\text{Geometrie: } D_{3h} = 2D_{3v} = -40 \text{ kN}$$

$$D_3 = -\sqrt{20^2 + 40^2} = -44,72 \text{ kN}$$

Kontrollen können durchgeführt werden, indem in jedem Schnitt jeweils die andere Hälfte des Systems mit den berechneten Stabkräften berechnet wird.

6 Schnittgrößen

Im Kapitel 4.1 Elemente von Tragwerken haben wir bereits Balken als Tragwerksbestandteile kennen gelernt. Die Abbildungen Abb. 4-2, Abb. 4-3 und Abb. 4-4 zeigen einen geraden und einen gekrümmten Balken sowie ein Beispiel für einen Rahmen.

In diesem Kapitel soll die *Berechnung der Schnittgrößen* von Balken und Balkentragwerken gezeigt werden. Wir beschränken uns hierbei wieder auf Tragwerke, die in einer Ebene liegen und die nur durch Kräfte und Momente in ihrer Ebene belastet werden.

6.1 Definition der Schnittgrößen am Balken

Der Schnitt wird so geführt, dass die Schnittebene senkrecht zur Längsachse des Balkens steht. Die in dieser Schnittebene wirkenden Kräfte werden zusammengefasst zu

- N Normalkraft, sie wirkt senkrecht ("normal") zur Schnittebene in x-Richtung
- Q Querkraft, sie wirkt parallel zur Schnittebene in z-Richtung
- M Moment, die Momentenachse ist die y-Richtung

Die nachfolgende Abb. 6-1 zeigt die Definition der positiven Schnittgrößen. Der Balken wurde geschnitten und die jeweils drei Schnittgrößen wurden in positiver Richtung angetragen. Im linken Balkenabschnitt (Abb. 6-1, unten links) liegt die Schnittstelle vom Balken aus betrachtet in positiver x-Richtung, dies bezeichnen wir als *positives Schnittufer*. Entsprechend heißt das andere Schnittufer *negatives Schnittufer*, weil es in negativer x-Richtung liegt.

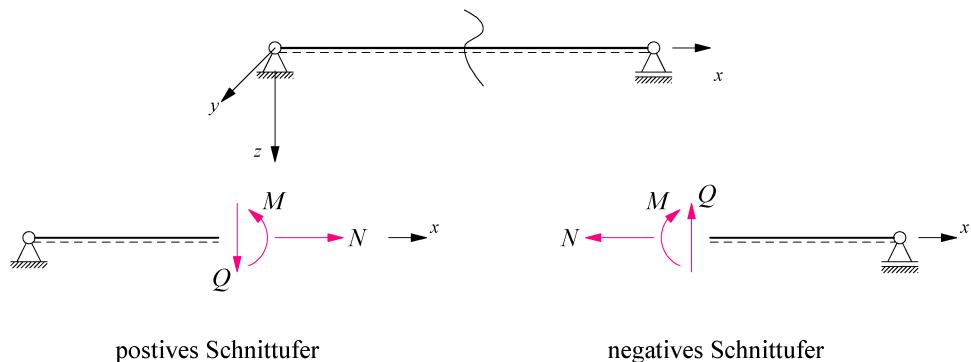


Abb. 6-1 Definition der positiven Schnittgrößen am Balken

Am positiven Schnittufer haben alle Schnittgrößen die Richtung der Koordinatenachsen:

- N zeigt in x-Richtung
- Q zeigt in z-Richtung
- M dreht um die y-Achse

Am negativen Schnittufer wirken die positiven Schnittgrößen jeweils den Koordinatenachsen entgegengesetzt.

In Abb. 6-2 ist zusätzlich eine *gestrichelte Linie* eingezeichnet, die ersetztweise zur vereinfachten Darstellung der Koordinatenachsen genügt. Die Bedeutung ist folgende: liegt die gestrichelte Linie unter dem Balken, dann zeigt die x-Achse nach rechts, liegt sie oberhalb, dann zeigt die x-Achse nach links. Diese Vereinbarung ist unter Statikern sehr gebräuchlich und wird daher im folgenden in diesem Skript verwendet. Manche Statiker bezeichnen diese gestrichelte Linie als "Zugfaser", da ein positives Schnittmoment auf dieser Balkenseite Zugspannungen erzeugt. Dies ist eine wichtige Information, da z.B. die Lage von Bewehrung in Stahlbeton von der Richtung des Momentes abhängt.

6.2 Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößenverlauf

Um ein Balkentragwerk sicher entwerfen zu können, müssen an jeder Stelle die Schnittgrößen N , Q und M bekannt sein. Es ist üblich den Verlauf der Schnittgrößen entlang der Tragwerksteile als Funktionsverlauf grafisch darzustellen. Abb. 6-3 zeigt den Funktionsverlauf des Biegemomentes an einem Balken auf zwei Stützen unter einer Einzellast.

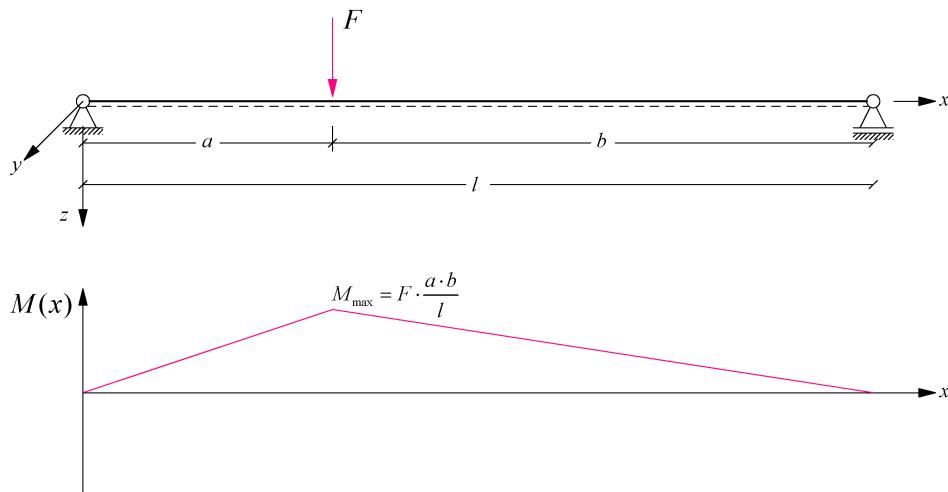


Abb. 6-3 Funktionsverlauf "M" an einem Einfeldbalken unter Einzellast

Aus diesem *Funktionsverlauf* ist folgendes zu erkennen: die Biegemomente sind an beiden Enden gleich Null und sie steigen linear an bis zum Lasteinleitungspunkt. Wenn der Balken zu schwach dimensioniert wäre, dann würde er mit hoher Wahrscheinlichkeit genau an dieser Stelle, an der die Last F angreift, brechen. Wenn es sich um einen langen Balken handelt und es wäre unser Bestreben, Material einzusparen, dann könnte der Balken am Lasteinleitungspunkt am stärksten konstruiert werden und zu den Enden hin schwächer sein. Aber Vorsicht: der Balken könnte auch durch Querkräfte (Abscheren) oder durch Normalkräfte beschädigt werden. Auch diese Größen müssen am gesamten Balken bekannt sein, um eine sichere Bemessung durchzuführen.

In Abb. 6-3 ist ein linearer Funktionsverlauf mit einer *Unstetigkeitsstelle* dargestellt. Wie ermittelt man die Art des Funktionsverlaufs? Könnte es nicht auch sein, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt oder z.B. eine Funktion mit einem Sprung? Diese Frage ließe sich ohne eine weitere Theorie zu bemühen, dadurch beantworten, dass an einer Vielzahl von Punkten des Balkens geschnitten wird (z.B. an 100 äquidistanten Punkten) und die gewonnenen Ergebnisse aufgetragen würden. Da dies mühselig ist, wäre es bequemer, eine Theorie zur Verfügung zu haben, die dieses Problem löst. Merke:

Nichts ist so praktisch wie eine gute Theorie.

Wir betrachten einen Balken unter verteilten Lasten und unter Einzellasten bzw. Einzelmomenten. Verteilte Lasten können senkrecht, schräg oder parallel zur Balkenachse wirken. Wir teilen verteilte Lasten bei unserer Herleitung in parallele und senkrechte Anteile auf und betrachten diese getrennt voneinander.

6.3 Funktionsverlauf der Normalkraft

Abb. 6-4 zeigt einen Balken unter einer beliebig verlaufenden verteilten Last $p(x)$ parallel zur Balkenachse.

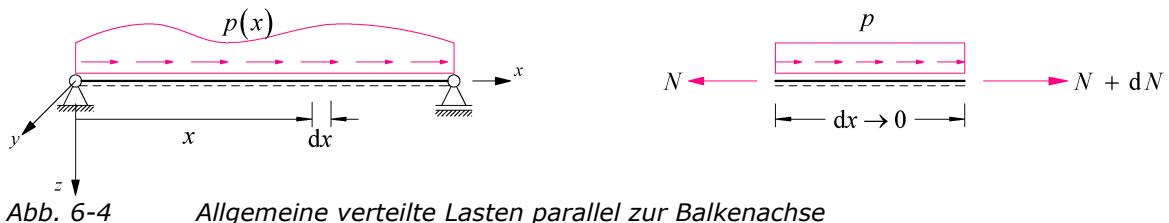


Abb. 6-4 Allgemeine verteilte Lasten parallel zur Balkenachse

Wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen an einem differentiell kleinen Stück dx auf:

$$\sum H = 0: -N + p \cdot dx + N + dN = 0$$

$$\frac{dN}{dx} = -p \rightarrow N(x) = - \int p(x) \, dx \quad (6.1)$$

In Worten: den Funktionsverlauf der Normalkraft erhält man, wenn man den Funktionsverlauf der verteilten Belastung parallel zur Balkenachse integriert und mit (-1) multipliziert. Diese vorstehend gewonnenen Zusammenhänge der *Differentialgleichung für N* (6.1) lassen sich in der folgenden Tabelle Tab. 6-1 zusammenfassen.

$p(x)$ parallel zur Balkenachse	\rightarrow	Funktionsverlauf $N(x)$
unbelastet	\rightarrow	konstant
$p(x) = 0$	\rightarrow	
konstant	\rightarrow	linear
$p(x)$	\rightarrow	
linear veränderlich	\rightarrow	Parabel 2. Ordnung
$p(x)$	\rightarrow	

Tab. 6-1 Funktionsverläufe N für verteilte Belastung parallel zur Balkenachse

Einzelkräfte parallel zur Balkenachse erzeugen Unstetigkeitsstellen im Funktionsverlauf von N . Abb. 6-5 zeigt eine Stelle in einem Balken, an der eine Einzelkraft parallel zur Balkenachse angreift.

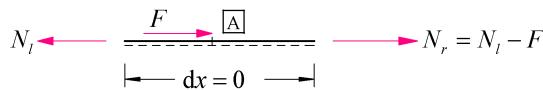


Abb. 6-5 Unstetigkeit am Punkt A infolge einer Einzellast parallel zur Balkenachse

Zur Ermittlung der Unstetigkeit werden wiederum die Gleichgewichtsbedingungen an einem differentiell kleinen Stück des Balkens aufgestellt.

$$\sum H = 0: -N_l + F + N_r = 0 \rightarrow N_r = N_l - F$$

In Worten: wird eine in x-Richtung wirkende Kraft F parallel zur Balkenachse eingeleitet, entsteht in x-Richtung ein Sprung im Funktionsverlauf von N der Größe $-F$

6.4 Funktionsverlauf von Querkraft und Moment

Abb. 6-6 zeigt einen Balken unter einer beliebigen verteilten Last $q(x)$ quer zur Balkenachse.

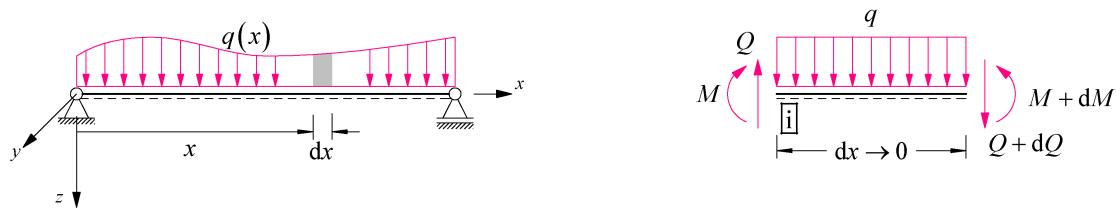


Abb. 6-6 Allgemeine verteilte Lasten quer zur Balkenachse

Wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen an einem differentiell kleinen Stück dx auf:

$$\sum V = 0: -Q + q \cdot dx + Q + dQ = 0 \rightarrow dQ = -q \cdot dx$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q \rightarrow Q(x) = - \int q(x) \, dx \quad (6.2)$$

In Worten: den Funktionsverlauf der Querkraft erhält man, wenn man den Funktionsverlauf der verteilten Belastung senkrecht zur Balkenachse integriert und mit (-1) multipliziert.

$$\sum M^{(i)} = 0: -M - q \cdot dx \cdot \underbrace{\frac{dx}{2}}_{\rightarrow 0} - Q \cdot dx - \underbrace{dQ \cdot dx}_{=q \cdot dx^2 \rightarrow 0} + M + dM = 0 \rightarrow dM = +Q \cdot dx$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \rightarrow M(x) = + \int Q(x) \, dx = - \iint q(x) \, dx \quad (6.3)$$

In Worten: den Funktionsverlauf des Biegemoments erhält man, wenn man den Funktionsverlauf der Querkraft integriert bzw. den Funktionsverlauf der verteilten Belastung senkrecht zur Balkenachse zweifach integriert und mit (-1) multipliziert.

Diese vorstehend gewonnenen Zusammenhänge der *Differentialgleichungen für Q und M* (6.2) und (6.3) lassen sich in der folgenden Tabelle Tab. 6-2 zusammenfassen.

$q(x)$ quer zur Balkenachse	$\rightarrow Q(x) = - \int q(x) \, dx$	$\rightarrow M(x) = + \int Q(x) \, dx = - \iint q(x) \, dx$
Querkraft Null	$\rightarrow Q(x) = 0$	konstant
$q(x) = 0$	bzw.	
konstant		linear
$\rightarrow Q(x)$	$\rightarrow M(x)$	
linear		Parabel 2. Ordnung
$q(x)$	$\rightarrow Q(x)$	$\rightarrow M(x)$
Parabel 2. Ordnung		Parabel 3. Ordnung
$q(x)$	$\rightarrow Q(x)$	$\rightarrow M(x)$

Tab. 6-2 Funktionsverläufe Q und M für verteilte Belastung quer zur Balkenachse

Einzelmomente und Einzelkräfte quer zur Balkenachse erzeugen Unstetigkeitsstellen im Funktionsverlauf von Q und M . Tab. 6-3 zeigt einen Punkt i eines Balkens, an dem eine Einzelkraft bzw. ein Einzelmoment angreifen.

Zur Ermittlung der Unstetigkeit werden die Gleichgewichtsbedingungen an einem differentiell kleinen Stück des Balkens aufgestellt.

$$\sum V = 0: -Q_l + F_i + Q_r = 0 \rightarrow Q_r = Q_l - F_i$$

$$\sum M = 0: -M_l + M_i + M_r = 0 \rightarrow M_r = M_l - M_i$$

Diese vorstehend gewonnenen Zusammenhänge für Einzellasten senkrecht zur Balkenachse und Einzelmomente lassen sich in der folgenden Tabelle Tab. 6-3 zusammenfassen.

Last	\rightarrow	$Q(x)$	\rightarrow	$M(x)$
	\rightarrow	Sprung: $Q_r = Q_l - F_i$ 	\rightarrow	Knick, jedoch: $M_r = M_l$
	\rightarrow	Sprung: $Q_r = Q_l + F_i$ 	\rightarrow	Knick, jedoch: $M_r = M_l$
	\rightarrow	Unveränderte Querkraftlinie: $Q_r = Q_l$ 	\rightarrow	Sprung: $M_r = M_l - M_i$
	\rightarrow	Unveränderte Querkraftlinie: $Q_r = Q_l$ 	\rightarrow	Sprung: $M_r = M_l + M_i$
Richtungen von F_i und M_i beachten!				

Tab. 6-3 *Unstetigkeiten in Q und M infolge einer Einzellast quer zur Balkenachse und eines Einzelmomentes*

6.5 Ermittlung der Schnittgrößen durch direkte Anwendung der Differentialgleichungen

Bei einfachen Tragwerken mit einer einfachen Belastung ist es ohne größere Schwierigkeiten möglich die *Zustandslinien* (Funktionsverläufe) der Schnittgrößen durch direkte Anwendung der Differentialgleichungen zu ermitteln.

Beispiel 6-1 Anwendung der Differentialgleichungen an einem Balken auf zwei Stützen

Die Zustandslinien Q und M sollen ermittelt und grafisch dargestellt werden. Die Normalkräfte sind im gesamten Balken Null.

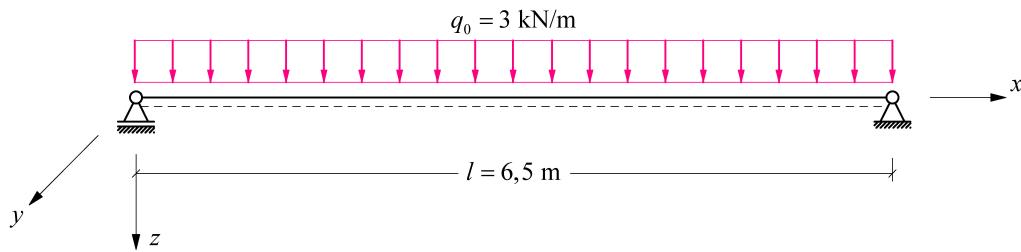


Abb. 6-7 Beispiel 6-1

Die Funktion $q(x)$ wird aufgestellt und zweifach integriert. Bei der ersten Integration erhalten wir den Funktionsverlauf $Q(x)$, bei der zweiten Integration den Funktionsverlauf $M(x)$.

$$q(x) = q_0 = 3 \text{ kN/m}$$

$$Q(x) = - \int q(x) = -q_0 \cdot x + C_1 \quad (1)$$

$$M(x) = + \int Q(x) = - \int \int q(x) = -\frac{1}{2} q_0 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 erhalten wir durch Einsetzen der Randbedingungen in die Funktion $M(x)$. Wir wissen, dass das Moment an beiden Enden des Balkens Null ist und können deshalb schreiben:

$$M(x=0) = 0 : -\frac{1}{2} q_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$M(x=l) = 0 : -\frac{1}{2} q_0 \cdot l^2 + C_1 \cdot l = 0 \rightarrow C_1 = \frac{1}{2} q_0 \cdot l$$

Die Funktionen lauten also:

$$Q(x) = -q_0 x + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l \quad \text{und} \quad M(x) = \frac{1}{2} q_0 (-x^2 + l \cdot x)$$

Damit wir diese Verläufe maßstäblich zeichnerisch darstellen können, ermitteln wir uns numerische Werte an drei Punkten.

	Gleichung	$x = 0$	$x = \frac{l}{2}$	$x = l$
Q	$-q_0 x + \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l$	$\frac{q_0 \cdot l}{2} = +9,75$	0	$-\frac{q_0 \cdot l}{2} = -9,75$
M	$\frac{1}{2} q_0 (-x^2 + l \cdot x)$	0	$\frac{q_0 \cdot l^2}{8} = +15,84$	0

Tab. 6-4 Ergebnisse zu Beispiel 6-1

Wir tragen die Funktionsverläufe grafisch auf. Damit sich ein leicht zu interpretierendes Bild ergibt, werden positive Werte immer auf der Seite angetragen, auf der die gestrichelte Linie liegt, negative Werte auf der gegenüber liegenden Seite.

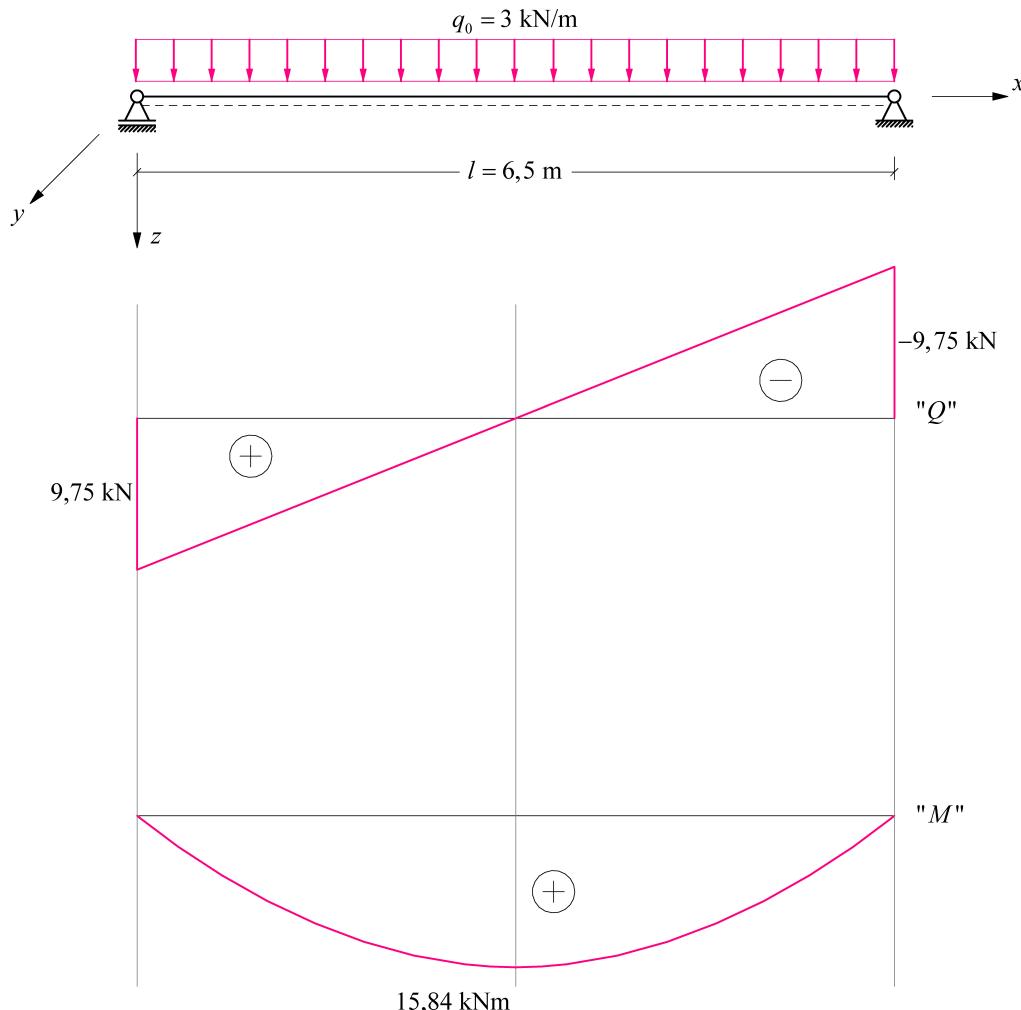


Abb. 6-8 Zustandslinien Q und M zu Beispiel 6-1

Die Funktionsverläufe von Q und M in Abb. 6-8 wollen wir noch eingehender betrachten. Nach den Gleichungen (6.2) und (6.3) sind wir durch Integration zu den Funktionen für Q und M gekommen. Umgekehrt gilt, dass wir danach auch durch Ableitung von $M(x)$ zu $Q(x)$ kommen können und durch Ableitung von $Q(x)$ $-q(x)$ erhalten. In Worten:

- $Q(x)$ stellt die *Steigung* von $M(x)$ dar,
- $-q(x)$ stellt die *Steigung* von $Q(x)$ dar.

In Abb. 6-8 sehen wir, dass in der Mitte des Balkens $Q = 0$ ist, d.h. der Funktionsverlauf $M(x)$ muss dort die *Steigung* Null haben, mithin ein Maximum. Es versteht sich von selbst, dass es für Statiker eine wichtige Information ist, wo sich das Maximum einer Schnittgröße befindet.

Beispiel 6-2 Anwendung der Differentialgleichungen an einem Kragarm

Die Zustandslinien Q und M sollen ermittelt und grafisch dargestellt werden. Die Normalkräfte sind im gesamten Balken Null.

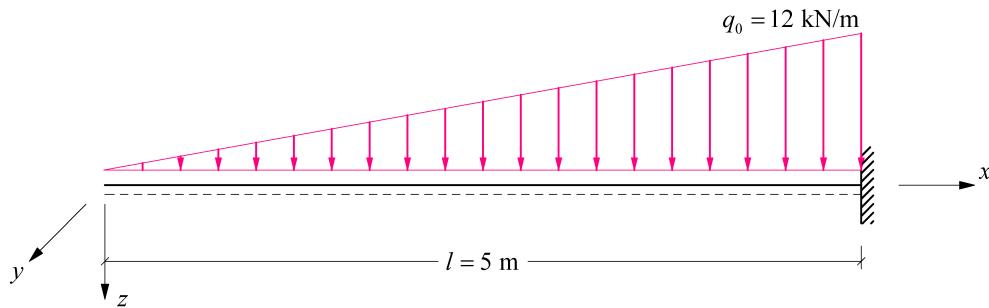


Abb. 6-9 Beispiel 6-2

Die Funktion $q(x)$ wird aufgestellt und zweifach integriert. Bei der ersten Integration erhalten wir den Funktionsverlauf $Q(x)$, bei der zweiten Integration den Funktionsverlauf $M(x)$.

$$q(x) = q_0 \cdot \frac{x}{l} = \frac{q_0}{l} \cdot x \quad (\text{lineare Funktion})$$

$q(x)$ wird zweifach integriert und wir erhalten bei der ersten Integration den Funktionsverlauf $Q(x)$, bei der zweiten Integration den Funktionsverlauf $M(x)$.

$$Q(x) = -\int q(x) dx = -\frac{q_0}{l} \cdot \int x dx = -\frac{q_0}{2 \cdot l} \cdot x^2 + C_1 \quad (1)$$

$$M(x) = +\int Q(x) dx = \int \left(-\frac{q_0}{2 \cdot l} \cdot x^2 + C_1 \right) dx = -\frac{q_0}{6 \cdot l} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \quad (2)$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 erhalten wir durch Einsetzen der Randbedingungen in die Funktionen $Q(x)$ und $M(x)$. Wir wissen, dass die Querkraft sowie das Moment am linken Ende des Balkens Null sind und können deshalb schreiben:

$$Q(x=0) = 0 : -\frac{q_0}{2l} \cdot 0^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$M(x=0) = 0 : -\frac{q_0}{6l} \cdot 0^3 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Die Funktionen lauten also:

$$Q(x) = -\frac{q_0}{2 \cdot l} \cdot x^2$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6 \cdot l} \cdot x^3$$

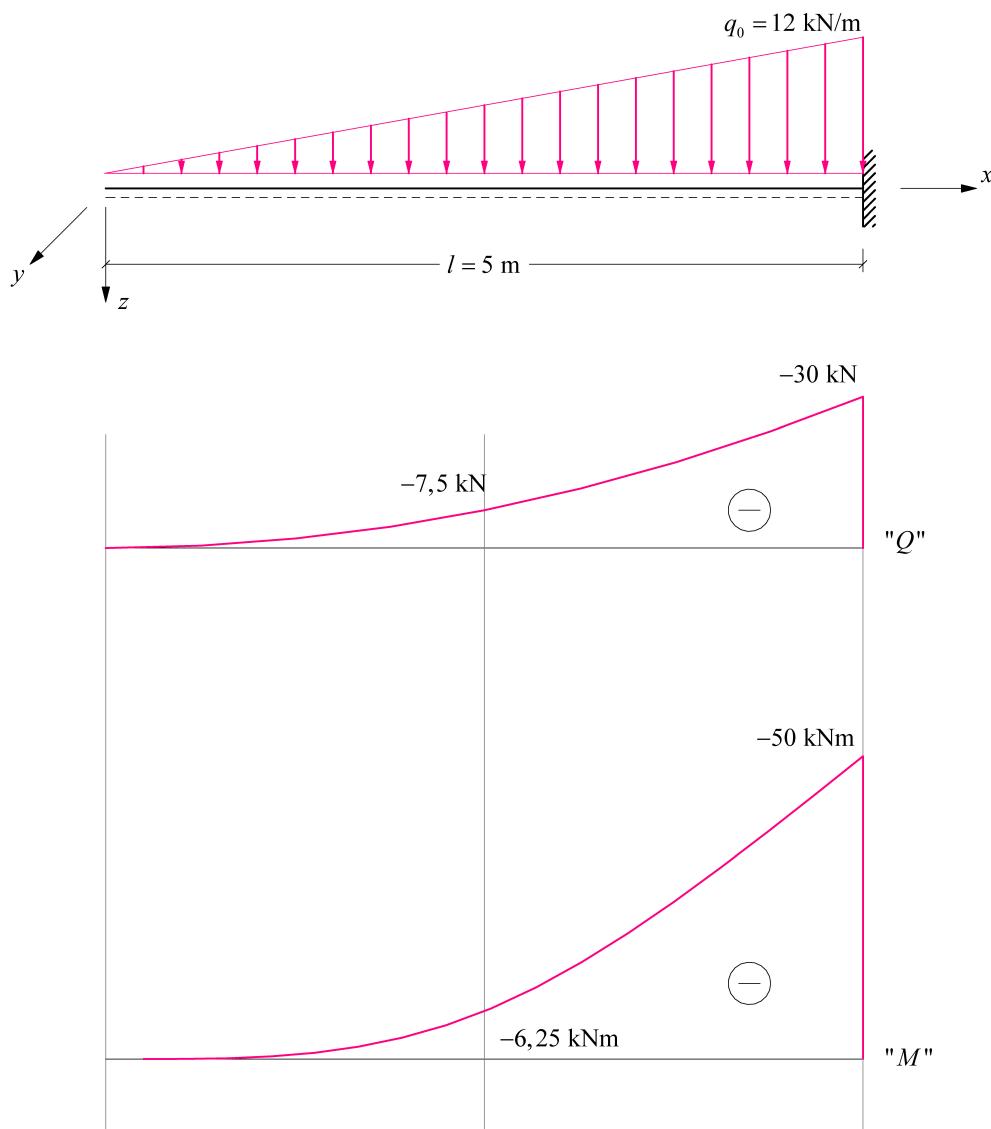
$q(x)$ ist eine lineare Funktion. $Q(x)$ ist also wie erwartet eine quadratische Funktion und $M(x)$ ist eine kubische Funktion (siehe Tab. 6-2).

Damit wir diese Verläufe maßstäblich zeichnerisch darstellen können, ermitteln wir uns numerische Werte an drei Punkten.

	Gleichung	$x = 0$	$x = \frac{l}{2}$	$x = l$
Q	$-\frac{q_0}{2 \cdot l} \cdot x^2$	0	$-\frac{q_0}{8} \cdot l$ -7,5	$-\frac{q_0}{2} \cdot l$ =-30
M	$-\frac{q_0}{6 \cdot l} \cdot x^3$	0	$-\frac{q_0}{48} \cdot l^2$ =-6,25	$-\frac{q_0}{6} \cdot l^2$ =-50

Tab. 6-5 Ergebnisse zu Beispiel 6-2

Wir tragen die Funktionsverläufe grafisch auf.

Abb. 6-10 Zustandslinien Q und M zu Beispiel 6-2

6.6 Schnittgrößen an Einfeldbalken

Bei Auftreten von Unstetigkeiten ist die Ermittlung der Schnittgrößen durch direkte Anwendung der Differentialgleichungen mühsam. Das Vorhandensein von Unstetigkeiten ist jedoch der übliche Fall, da häufig Einzelkräfte oder Einzelmomente auf Tragwerke einwirken. Wir verwenden deshalb unsere Erkenntnisse über den Zusammenhang der Funktionsverläufe von q , Q und M aus den Differentialbeziehungen der Gleichungen (6.1), (6.2) und (6.3) im Zusammenspiel mit Schnittprinzip und Gleichgewichtsbedingungen.

Beispiel 6-3 Schnittgrößen an einem Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast

Die Zustandslinien Q und M sind zu ermitteln. Im gesamten Balken ist $N = 0$.

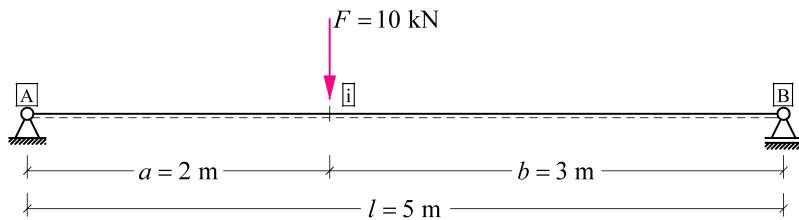


Abb. 6-11 Beispiel 6-3

Was wissen wir über die Funktionsverläufe von Q und M ? Das System ist nicht durch eine verteilte Last senkrecht zur Balkenachse belastet, d.h. $q(x) = 0$. Aus Tab. 6-2 und Tab. 6-3 können wir für $q(x) = 0$ feststellen:

$Q(x)$ ist konstant, im Sonderfall kann $Q(x) = 0$ sein

$M(x)$ ist linear, bei $Q(x) = 0$ wäre der Verlauf von $M(x)$ konstant

$Q(x)$ macht einen Sprung um $-F$ an der Stelle i

$M(x)$ hat an der Stelle i einen Knick

Außerdem sehen wir, dass an beiden Balkenenden $M = 0$ ist.

Um die Zustandslinien eindeutig ermitteln zu können benötigen wir also nur die beiden Schnitte, die in Abb. 6-12 eingezeichnet sind.

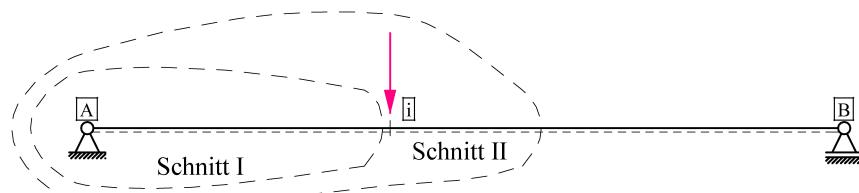


Abb. 6-12 Benötigte Schnitte in Beispiel 6-3

Da Schnitt I das Auflager bei **A** schneidet, müssen zunächst die unbekannten Auflagerkräfte an einem Schnitt um das Gesamtsystem berechnet werden.

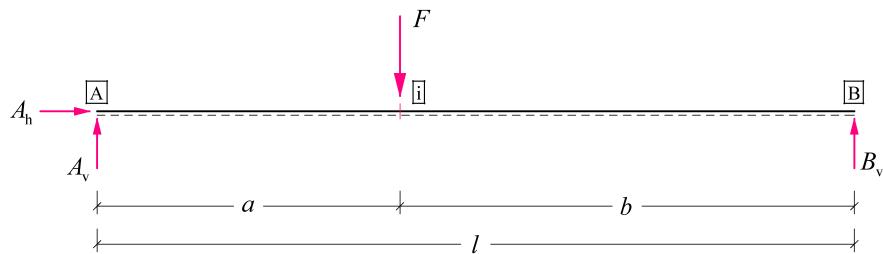


Abb. 6-13 Schnitt um das Gesamtsystem

$$\sum H = 0: \quad A_h = 0$$

$$\sum M^{(A)} = 0: -F \cdot a + B_v \cdot l = 0$$

$$\sum M^{(B)} = 0: -A_v \cdot l + F \cdot b = 0$$

$$B_v = F \cdot \frac{a}{l} = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4 \text{ kN}$$

$$A_v = F \cdot \frac{b}{l} = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6 \text{ kN}$$

Schnitt I

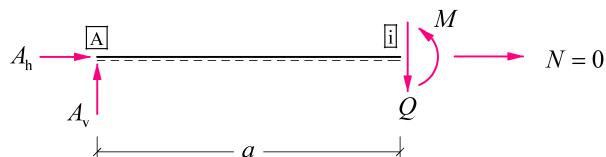


Abb. 6-14 Schnitt I

$$\sum M^{(i)} = 0: -A_v \cdot a + M = 0$$

$$\sum V = 0: \quad Q = A_v = +6 \text{ kN}$$

$$M = A_v \cdot a = F \cdot \frac{b}{l} \cdot a = F \cdot \frac{a \cdot b}{l}$$

$$M = 10 \cdot \frac{2 \cdot 3}{5} = 12 \text{ kNm}$$

Schnitt II

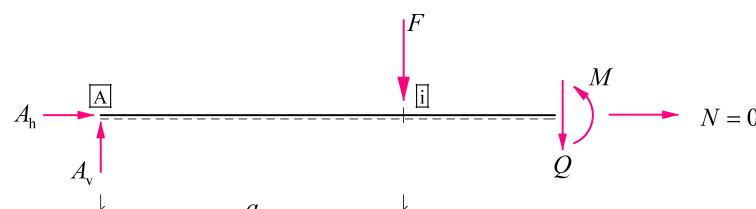


Abb. 6-15 Schnitt II

$$\sum V = 0: -A_v + F + Q = 0$$

$$Q = A_v - F = 6 - 10$$

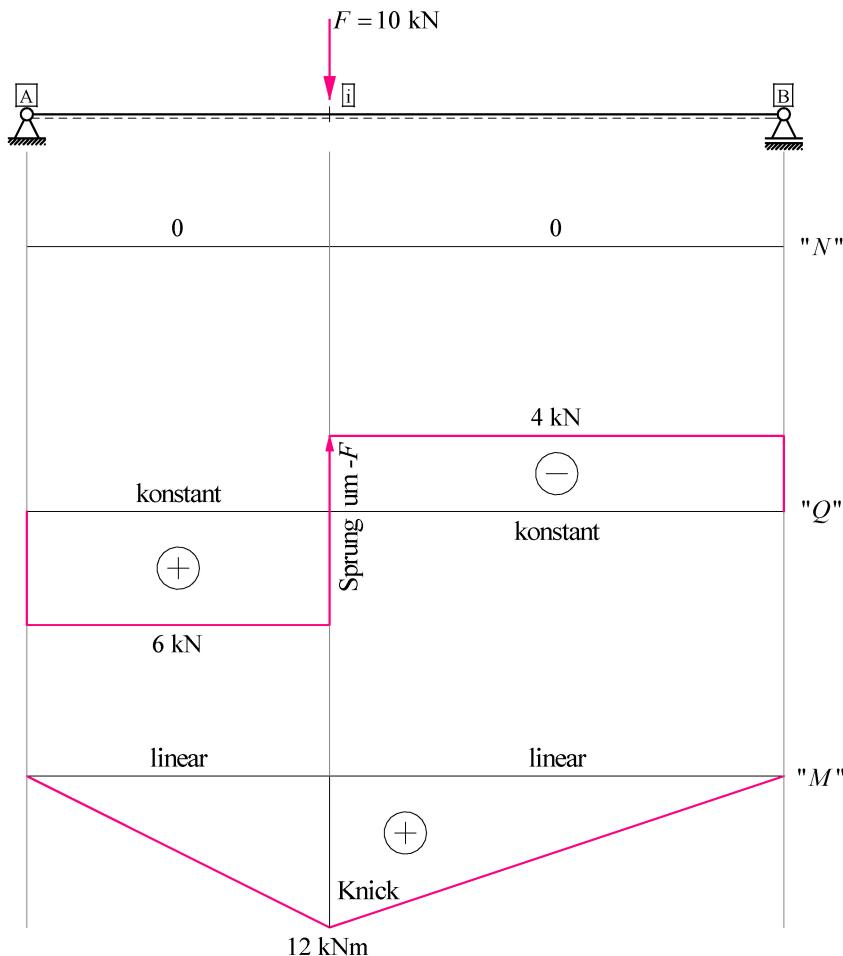
$$Q = -4 \text{ kN}$$

Wir haben ermittelt:

Q links und rechts der Unstetigkeitsstelle **i**

M am linken und rechten Rand ($M = 0$) sowie bei **i**

Wir können also die Zustandslinien N , Q und M zeichnen.

Abb. 6-16 Zustandslinien N , Q und M im Beispiel 6-3

Beispiel 6-4 Schnittgrößen an einem Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten

Die Zustandslinien Q und M sind zu ermitteln. Im gesamten Balken ist $N = 0$.

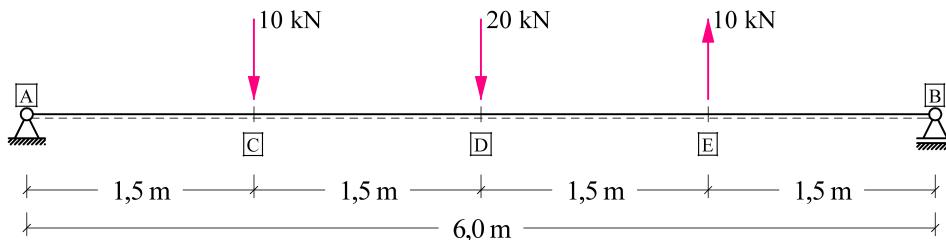


Abb. 6-17 Beispiel 6-4

Analog zu Beispiel 6-3 können wir mit Tab. 6-2 und Tab. 6-3 für $q(x) = 0$ feststellen:

$Q(x)$ ist zwischen den Lasteinleitungsstellen abschnittsweise konstant

$M(x)$ ist zwischen den Lasteinleitungsstellen abschnittsweise linear

$Q(x)$ macht bei jeder Lasteinleitungsstelle einen Sprung

$M(x)$ hat bei jeder Lasteinleitungsstelle einen Knick

$M = 0$ am linken und rechten Ende des Balkens

Um die Zustandslinien eindeutig ermitteln zu können benötigen wir also nur die vier Schnitte, die in Abb. 6-18 eingezeichnet sind.

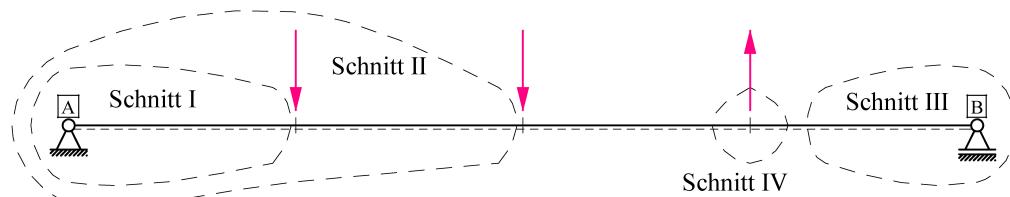


Abb. 6-18 Benötigte Schnitte im Beispiel 6-4

Da Schnitte I und III die Auflager schneiden, müssen zunächst die unbekannten Auflagerkräfte an einem Schnitt um das Gesamtsystem berechnet werden.

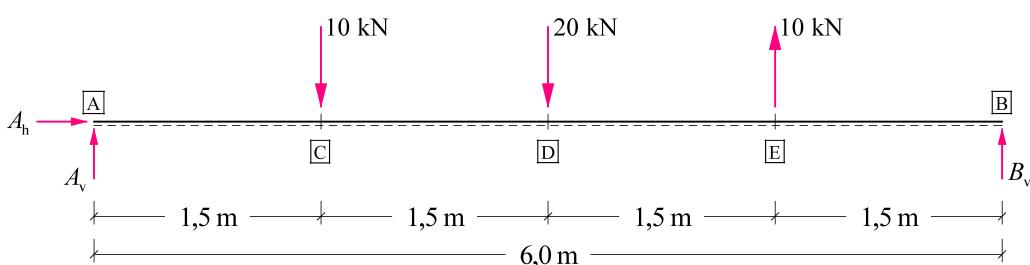


Abb. 6-19 Schnitt um das Gesamtsystem

$$\sum M^{(B)} = 0 :$$

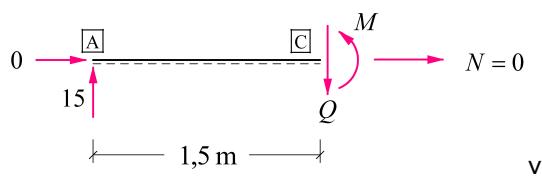
$$-A_v \cdot 6 + 10 \cdot 4,5 + 20 \cdot 3 - 10 \cdot 1,5 = 0$$

$$A_v = 15 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 :$$

$$-A_v + 10 + 20 - 10 - B_v = 0$$

$$B_v = 5 \text{ kN}$$

Schnitt I

$$\begin{aligned}\sum V = 0: \quad Q &= 15 \text{ kN} \\ \sum M^{(C)} = 0: -15 \cdot 1,5 + M &= 0 \\ M &= 22,5 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Abb. 6-20 Schnitt I

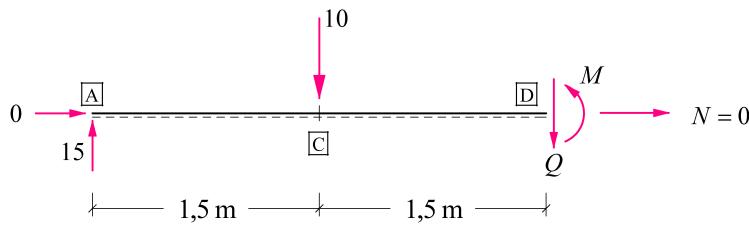
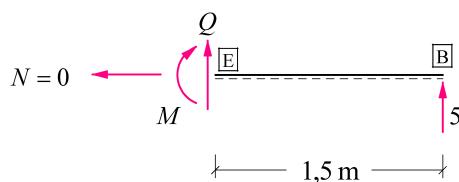
Schnitt II

Abb. 6-21 Schnitt II

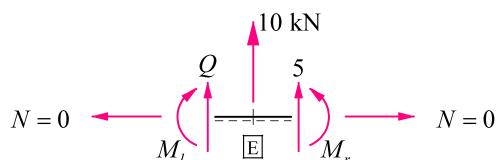
$$\begin{aligned}\sum V = 0: \quad -15 + 10 + Q &= 0 \\ Q &= +5 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M^{(D)} = 0: -15 \cdot 3 + 10 \cdot 1,5 + M &= 0 \\ M &= +30 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Schnitt III

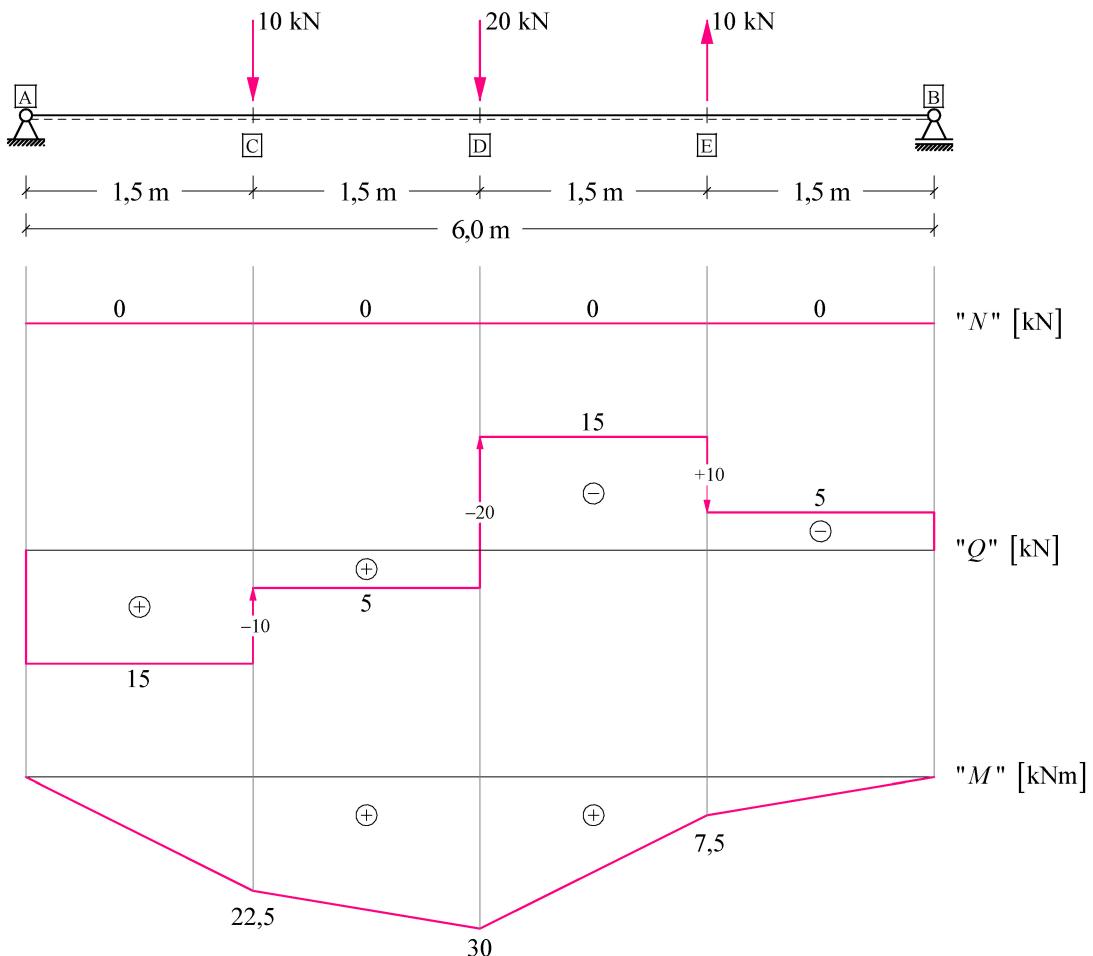
$$\begin{aligned}\sum V = 0: \quad Q &= -5 \text{ kN} \\ \sum M^{(E)} = 0: +5 \cdot 1,5 - M &= 0 \\ M &= +7,5 \text{ kNm}\end{aligned}$$

Abb. 6-22 Schnitt III

Schnitt IV

$$\begin{aligned}\sum V = 0: \quad -Q - 10 - 5 &= 0 \\ Q &= -15 \text{ kN}\end{aligned}$$

Abb. 6-23 Schnitt IV

Zustandlinien N , Q und M Abb. 6-24 Zustandslinien N , Q und M im Beispiel 6-4

In Zustandlinie " Q " ist an den Lasteinleitungsstellen die Größe des Sprungs eingezeichnet. Sie entspricht jeweils der Größe der Einzellast. Hiermit gewinnen wir eine gute Kontrollmöglichkeit für unsere Ergebnisse.

Auch anhand der Zustandlinie " M " können die Ergebnisse überprüft werden. Aus der Differentialgleichung (6.3) folgt die Aussage, dass der Funktionsverlauf $Q(x)$ die 1. Ableitung von $M(x)$ ist. Mit anderen Worten: die Steigung der Momentenlinie ist gleich der Querkraft. Wir überprüfen, ob dieser Zusammenhang in unseren Zustandlinien zu finden ist.

Abschnitt	Steigung: $(M_r - M_l)/l$	Q
$A - C$	$(22,5 - 0)/1,5 = +15$	+15 kN
$C - D$	$(30 - 22,5)/1,5 = +5$	+5 kN
$D - E$	$(7,5 - 30)/1,5 = -15$	-15 kN
$E - B$	$(0 - 7,5)/1,5 = -5$	-5 kN

Steigung der Momentenlinie und Querkraft stimmen abschnittsweise überein.

Da freuen wir uns.

Beispiel 6-5 Schnittgrößen an einem Kragarm unter Einzelmoment und Einzellast

An einem Kragträger wirken ein Einzelmoment und eine Einzellast. Die Zustandslinien N , Q und M sollen ermittelt werden.

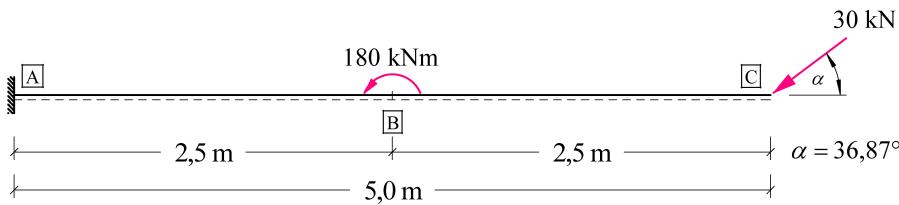


Abb. 6-25 Beispiel 6-5

Für $p(x) = 0$ und $q(x) = 0$ können wir mit Tab. 6-1, Tab. 6-2 und Tab. 6-3 feststellen:

$N(x)$ ist konstant, auch bei $\square B$ ist ein stetiger Verlauf

$Q(x)$ ist konstant, auch bei $\square B$ ist ein stetiger Verlauf

$M(x)$ ist zwischen den Lasteinleitungsstellen abschnittsweise linear, bei $\square B$ ist ein Sprung

$M = 0$ am rechten Ende des Balkens

Um die Zustandslinien eindeutig ermitteln zu können benötigen wir also nur die vier Schnitte, die in Abb. 6-26 eingezeichnet sind.

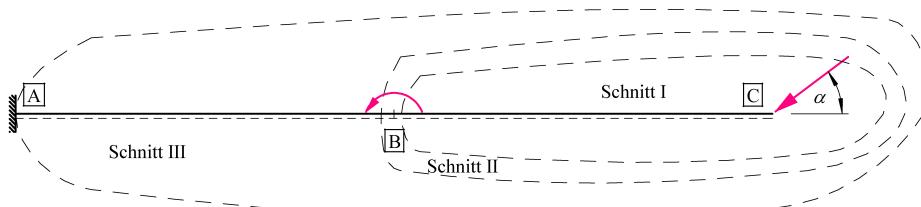
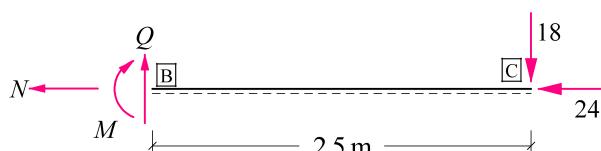


Abb. 6-26 Benötigte Schnitte im Beispiel 6-5

Die Einzellast wird in ihre Anteile parallel und senkrecht zur Balkenachse zerlegt (x - und z -Richtung).

$$F_x = 30 \cdot \cos 36,87^\circ = 24,00 \text{ kN} \quad F_z = 30 \cdot \sin 36,87^\circ = 18,00 \text{ kN}$$

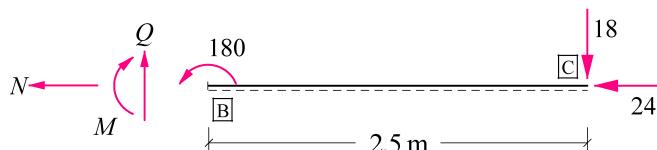
Schnitt I



$$\begin{aligned} \sum H = 0: \quad N &= -24 \text{ kN} \\ \sum V = 0: \quad Q &= +18 \text{ kN} \\ \sum M^{(B)} = 0: \quad -18 \cdot 2,5 - M &= 0 \\ M &= -45 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Abb. 6-27 Schnitt I

Schnitt II



$$\begin{aligned} \sum V = 0: \quad Q &= +18 \text{ kN} \\ \sum M^{(B)} = 0: \quad -18 \cdot 2,5 + 180 - M &= 0 \\ M &= +135 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Abb. 6-28 Schnitt II

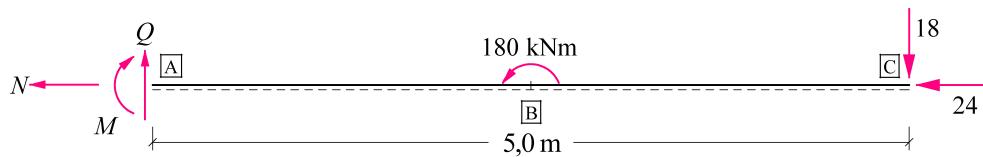
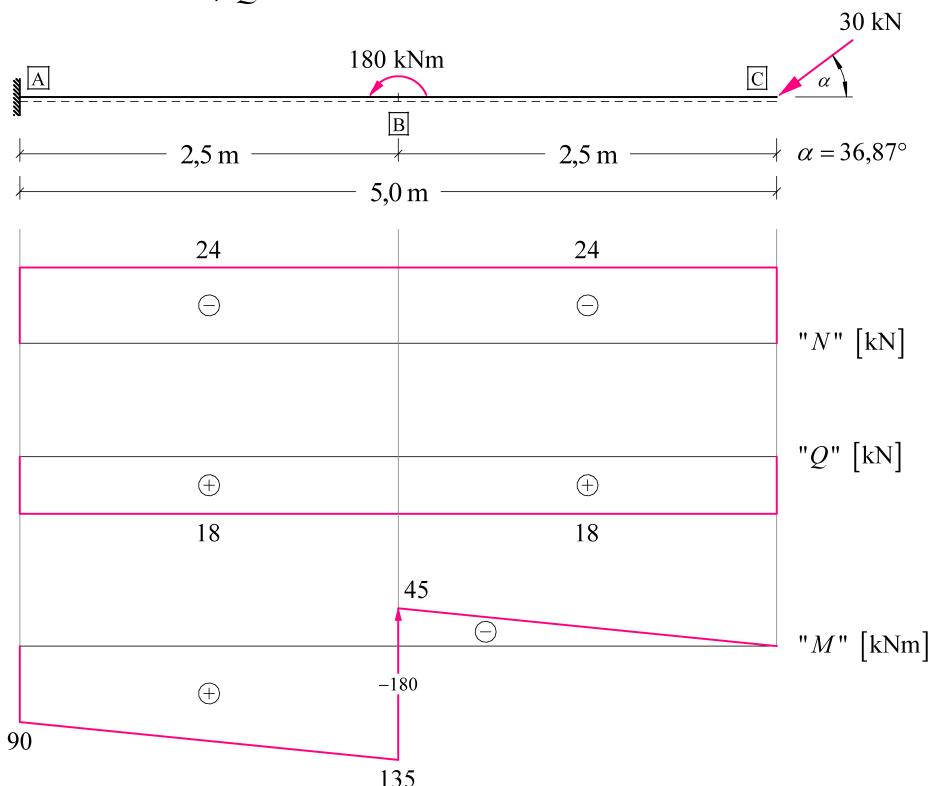
Schnitt III

Abb. 6-29 Schnitt III

$$\sum V = 0: \quad Q = +18 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: -18 \cdot 5 + 180 - M = 0$$

$$M = +90 \text{ kNm}$$

Zustandlinien N , Q und M Abb. 6-30 Zustandslinien N , Q und M im Beispiel 6-5

In Zustandlinie "M" in Abb. 6-30 ist an der Lasteinleitungsstelle des Einzelmomentes die Größe des Sprungs eingezeichnet. Sie entspricht der Größe des Einzelmomentes. Aus der Differentialgleichung (6.3) folgt die Aussage: die Steigung der Momentenlinie ist gleich der Querkraft. Wir überprüfen diesen Zusammenhang in unseren Zustandlinien.

Abschnitt	Steigung: $(M_r - M_l)/l$	Q
$A - B$	$(135 - 90)/2,5 = +18$	+18 kN
$B - C$	$[0 - (-45)]/2,5 = +18$	+18 kN

Steigung der Momentenlinie und Querkraft stimmen abschnittsweise überein.

6.7 Schnittgrößen an mehrteiligen Trägern

Zur Vereinfachung von Transport und Montage ist es üblich, Träger aus mehreren Teilen herzustellen und gelenkig oder starr zu verbinden. Außerdem kann durch eine geschickte Wahl der Verbindungsart und der Position der Gelenke das Tragverhalten beeinflusst werden. Beispiele dafür sind *Gelenkträger* und *Koppelträger*.

Da eine erhebliche Zahl von Trägerteilen in einem System vorhanden sein kann, ist es von Vorteil, den Berechnungsablauf so zu wählen, dass die aus den Gleichgewichtsbedingungen gewonnenen Gleichungen möglichst wenige Unbekannte enthalten. Bei Gelenkträgern kann man in der Regel wie folgt vorgehen: man überlegt sich eine günstige Reihenfolge der Montage und beginnt mit der *Berechnung in umgekehrter Reihenfolge*. D.h. man beginnt die Berechnung am zuletzt eingebauten Teil, setzt sie dann mit dem vorletzten Teil fort usw.

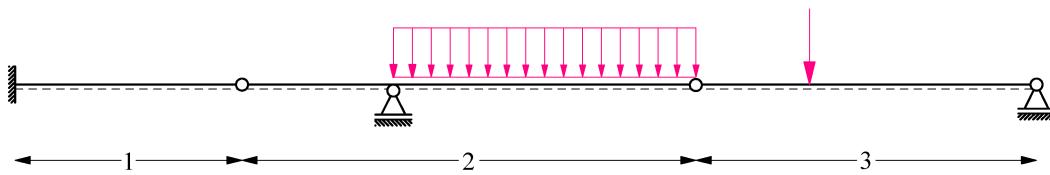


Abb. 6-31 Gelenkträger aus drei Einzelträgern

Beim Gelenkträger in Abb. 6-31 sind die drei Einzelträger von links nach rechts nummeriert. Der Einbau würde ebenfalls in der Reihenfolge 1-3 erfolgen. Man beginnt mit dem linken Kragträger, da dieser ohne weiteres stabil ist. Träger 2 wird stabil gelagert, indem man ihn mit Träger 1 gelenkig verbindet und auf das mittlere Gleitlager legt. Am Ende wird Träger 3 eingebaut.

Für die Berechnung ist es günstig, mit Träger 3 zu beginnen und sich dann weiter nach links zu den Trägern 2 und 1 "vorzuarbeiten".

Diese Berechnungsreihenfolge ist nicht als starr anzusehen, sondern stellt nur eine Entscheidungshilfe dar.

Beispiel 6-6 Schnittgrößen an einem zweiteiligen Träger

An einem zweiteiligen Träger wirken ein Einzelmoment, eine lineare und eine konstante Streckenlast. Die Zustandslinien Q und M sollen ermittelt werden.

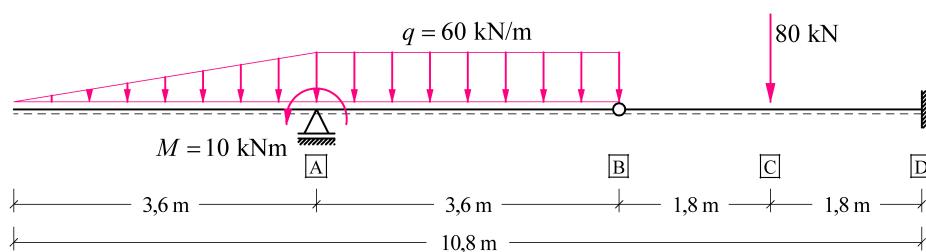


Abb. 6-32 Beispiel 6-6

Bei der Montage würde man mit dem rechten Kragarm beginnen, da dieser für sich stabil ist. Im zweiten Schritt würde der linke Träger angeschlossen. In der Berechnung bewegen wir uns also von links nach rechts.

Unter Beachtung von Tab. 6-2 und Tab. 6-3 können wir feststellen:

Bereich vom linken Trägerende bis \boxed{A} :

$Q(x)$ ist eine Parabel 2. Ordnung, am linken freien Ende ist $Q = 0$

$M(x)$ ist eine Parabel 3. Ordnung, bei \boxed{A} ist ein Sprung

Bereich von \boxed{A} bis \boxed{B} :

$Q(x)$ ist eine lineare Funktion, die Auflagerkraft bei \boxed{A} erzeugt einen Sprung

$M(x)$ ist eine Parabel 2. Ordnung, bei \boxed{B} ist $M = 0$

Bereich von \boxed{B} bis \boxed{D} :

$Q(x)$ ist abschnittsweise konstant, bei \boxed{C} ist ein Sprung

$M(x)$ ist eine lineare Funktion, bei \boxed{C} ist ein Knick

Um die Zustandslinien eindeutig ermitteln zu können benötigen wir also die Schnitte, die in Abb. 6-33 eingezeichnet sind.

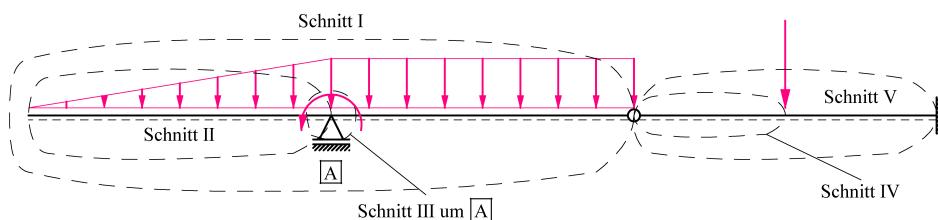


Abb. 6-33 Benötigte Schnitte im Beispiel 6-6

Schnitt I zur Ermittlung der Auflagerkraft bei \boxed{A}

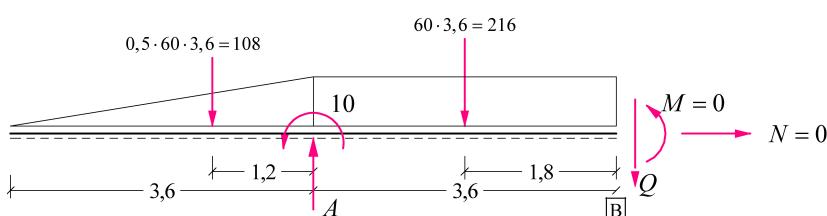


Abb. 6-34 Schnitt I

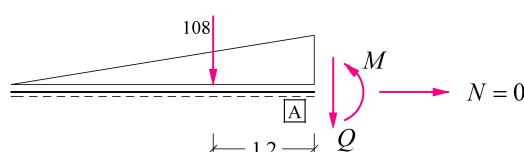
$$\sum M^{(B)} = 0 : 108 \cdot 4,8 + 216 \cdot 1,8 + 10 - A_v \cdot 3,6 = 0$$

$$A_v = +254,8 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : 108 - 254,8 + 216 + Q = 0$$

$$Q = -69,2 \text{ kN}$$

Schnitt II



$$\sum V = 0 : Q = -108 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 : 108 \cdot 1,2 + M = 0$$

$$M = -129,6 \text{ kNm}$$

Abb. 6-35 Schnitt II

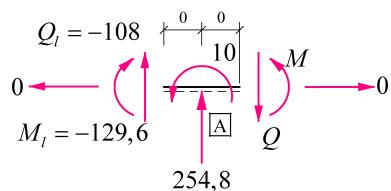
Schnitt III

Abb. 6-36

Schnitt III

$$\sum V = 0 : 108 - 254,8 + Q = 0$$

$$Q = +146,8 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0 : 129,6 + 10 + M = 0$$

$$M = -139,6 \text{ kNm}$$

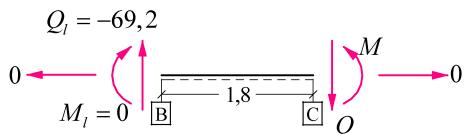
Schnitt IV

Abb. 6-37

Schnitt IV

$$\sum V = 0 : +69,2 + Q = 0$$

$$Q = -69,2 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(C)} = 0 : +69,2 \cdot 1,8 + M = 0$$

$$M = -124,6 \text{ kNm}$$

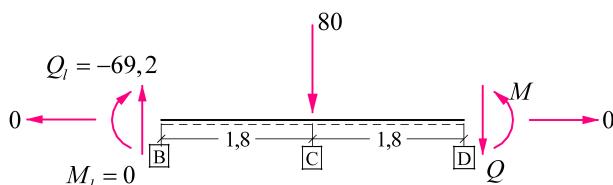
Schnitt V

Abb. 6-38

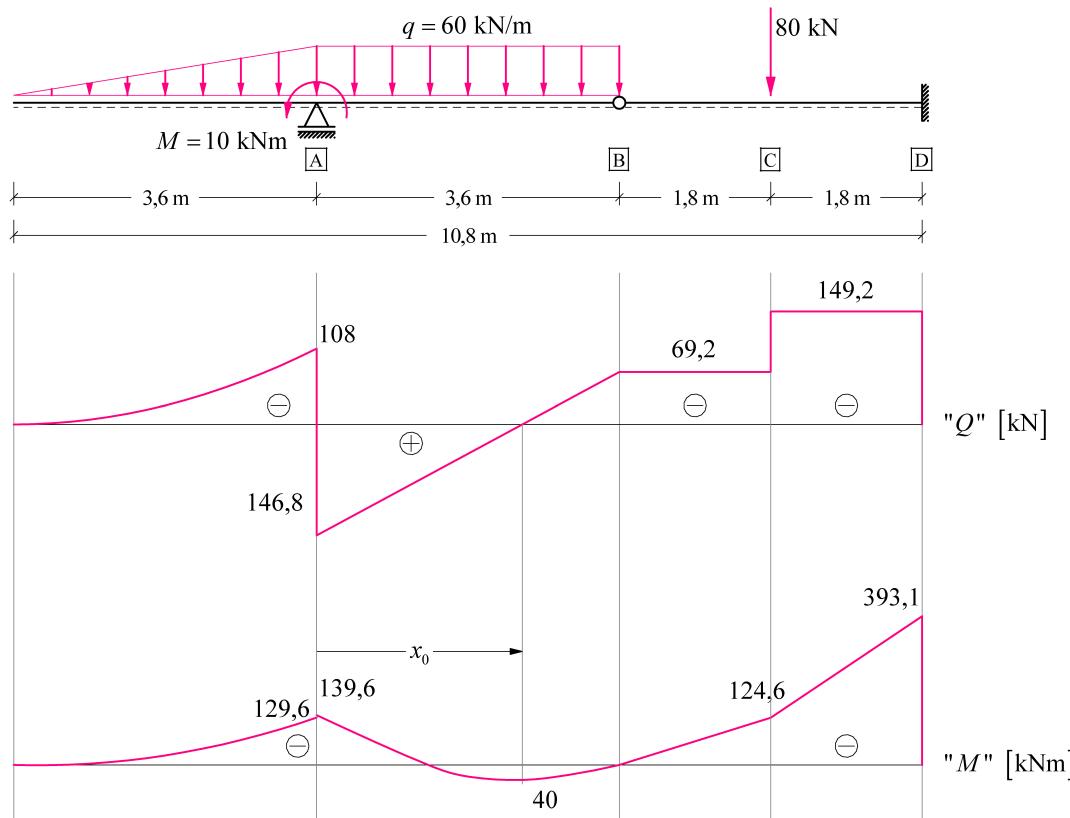
Schnitt V

$$\sum V = 0 : +69,2 + 80 + Q = 0$$

$$Q = -149,2 \text{ kN}$$

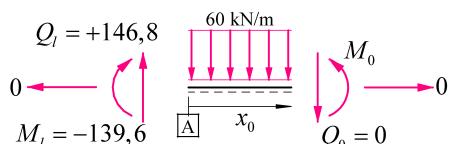
$$\sum M^{(D)} = 0 : +69,2 \cdot 3,6 + 80 \cdot 1,8 + M = 0$$

$$M = -393,1 \text{ kNm}$$

Zustandlinien Q und M Abb. 6-39 Zustandslinien N , Q und M im Beispiel 6-6

Schnitt zur Ermittlung des maximalen Momentes

Wie aus Abb. 6-39 ersichtlich hat die Zustandslinie " Q " zwischen den Punkten \boxed{A} und \boxed{B} einen Nulldurchgang. Dort befindet sich ein Extremwert der Zustandslinie " M ". Die Feststellung der Entfernung x_0 des Extremwertes von \boxed{A} könnte z.B. mit Hilfe des Strahlensatzes erfolgen. Es ist jedoch bequemer x_0 mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\sum V = 0$ zu berechnen. Hierzu schneiden wir einen Teil aus dem Träger vom Punkt \boxed{A} bis zur unbekannten Stelle in der Entfernung x_0 . An dieser Stelle ist die Querkraft $Q_0 = 0$. Im nächsten Schritt können wir im gleichen Schnitt auch M_0 an der Stelle x_0 berechnen.

Abb. 6-40 Schnitt bei M_{\max}

$$\begin{aligned} \sum V = 0: \quad -146,8 + 60 \cdot x_0 &= 0 \\ x_0 &= 2,447 \text{ m} \\ \sum M^{(\boxed{A})} = 0: +139,6 - 60 \cdot \frac{2,447^2}{2} + M_0 &= 0 \\ M_0 &= +40,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

6.8 Schnittgrößen an Rahmen

Tragwerke aus starr miteinander verbundenen abgewinkelten Balken heißen *Rahmen*. Im Kapitel 4.1 Elemente von Tragwerken ist auf Seite 27 in Abb. 4-4 ein einfaches Beispiel für einen Rahmen gezeigt. Neben einem globalen Koordinatensystem muss für jeden Balken des Rahmens ein lokales Koordinatensystem eingeführt werden. Im *globalen Koordinatensystem* kann z.B. die Lage der Rahmenknoten definiert werden.

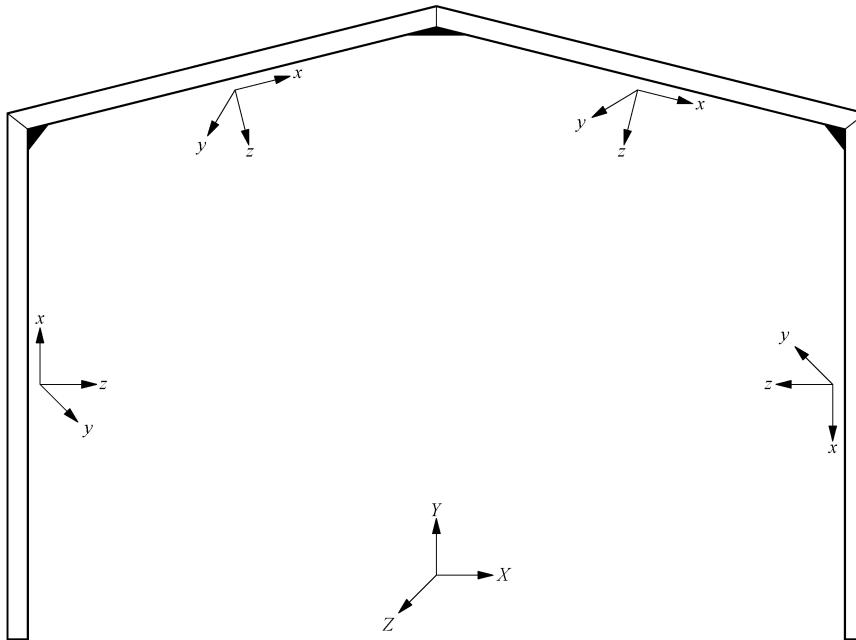


Abb. 6-41 Globales und lokale Koordinatensysteme an einem Rahmen

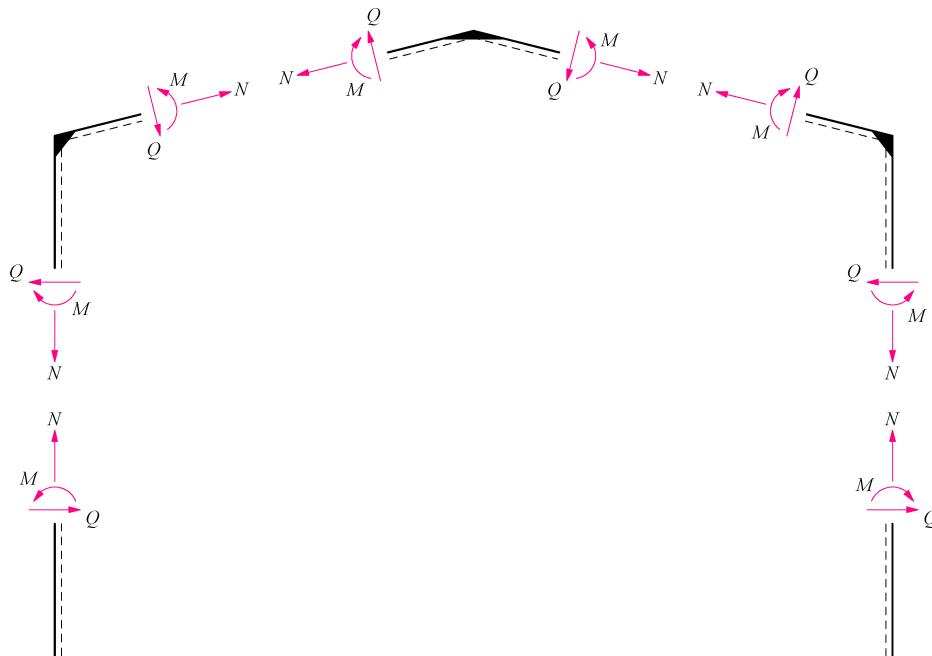


Abb. 6-42 Festlegung der positiven Schnittgrößen durch Verwendung der gestrichelten Linie

Jedem Balken wird ein *lokales Koordinatensystem* zugeordnet, wie aus Abb. 6-41 ersichtlich. Die Richtung der lokalen x-Achse folgt den Längsachsen der Balken, die z-Achse steht dazu senkrecht und befindet sich in der Zeichnungsebene. Die lokalen y-Achsen zeigen jeweils zum Betrachter hin aus der Zeichnungsebene heraus und bilden mit den lokalen x- und y-Achsen ein Rechtssystem.

Diese Definition der lokalen Koordinatenachsen ist für den ebenen Fall etwas unhandlich und wir bedienen uns daher wieder der *gestrichelten Linie* zur Festlegung positiver Schnittgrößen. In Abb. 6-42 ist anstelle der lokalen Koordinatensysteme jeweils die entsprechende gestrichelte Linie eingezeichnet. Die vier Einzelbalken des Rahmens sind geschnitten und die positiven Schnittgrößen nach Abb. 6-1 (Seite 47) an den Schnittufern eingetragen.

Beispiel 6-7 Schnittgrößen an einem Rahmentragwerk

An einem Rahmen sollen die Zustandslinien N , Q und M ermittelt werden

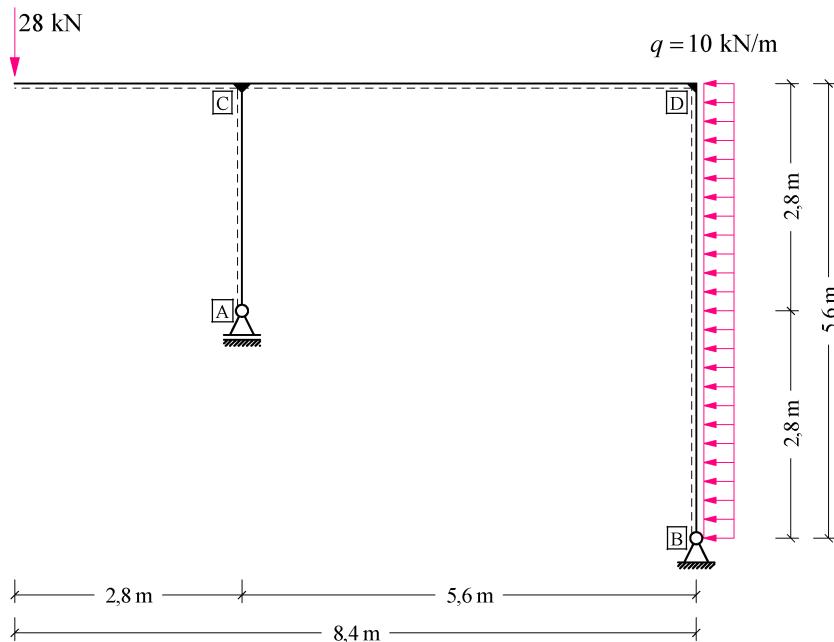


Abb. 6-43 Beispiel 6-7

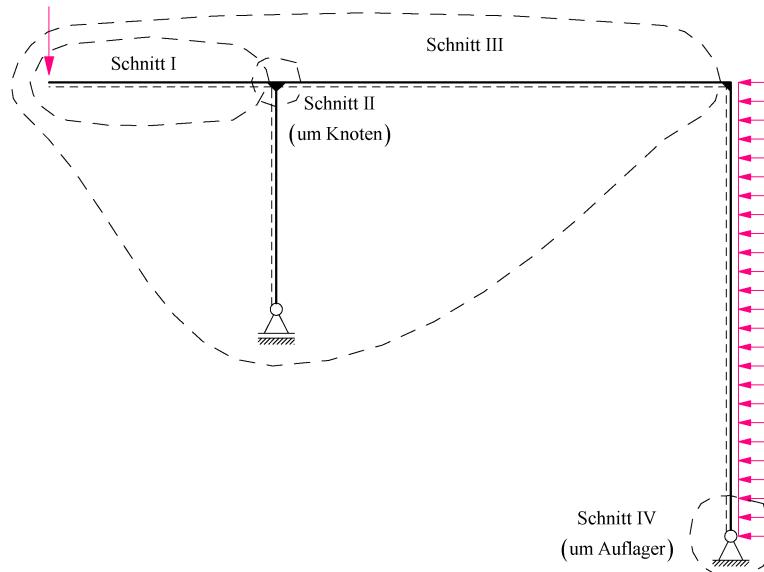


Abb. 6-44 Lage der Schnitte im Beispiel 6-7

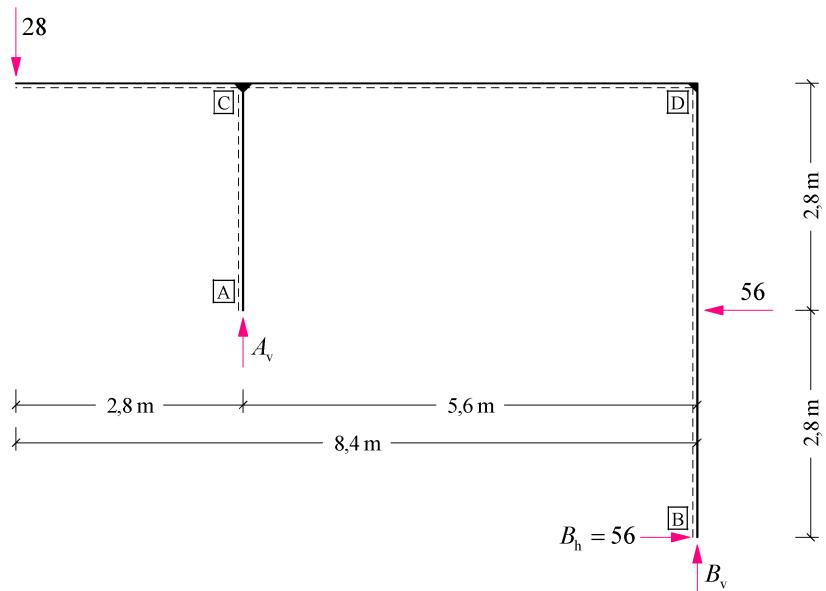
Auflagerkräfte

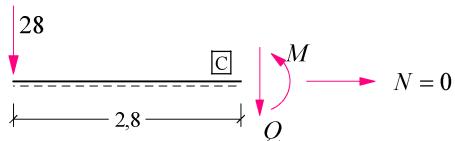
Abb. 6-45 Schnitt um das Gesamtsystem

$$\sum M^{(B)} = 0 : 28 \cdot 8,4 + 10 \cdot 5,6 \cdot 2,8 - A_v \cdot 5,6 = 0$$

$$A_v = +70 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 : +28 - 70 - B_v = 0$$

$$B_v = -42 \text{ kN}$$

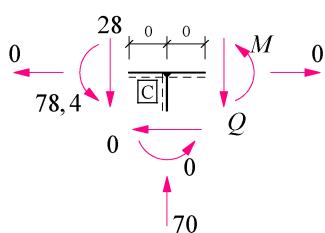
Schnitt I

$$\sum V = 0 : Q = -28 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(C)} = 0 : 28 \cdot 2,8 + M = 0$$

$$M = -78,4 \text{ kNm}$$

Abb. 6-46 Schnitt I

Schnitt II

$$\sum V = 0 : +28 - 70 + Q = 0$$

$$Q = +42 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(C)} = 0 : 78,4 + M = 0$$

$$M = -78,4 \text{ kNm}$$

Abb. 6-47 Schnitt II

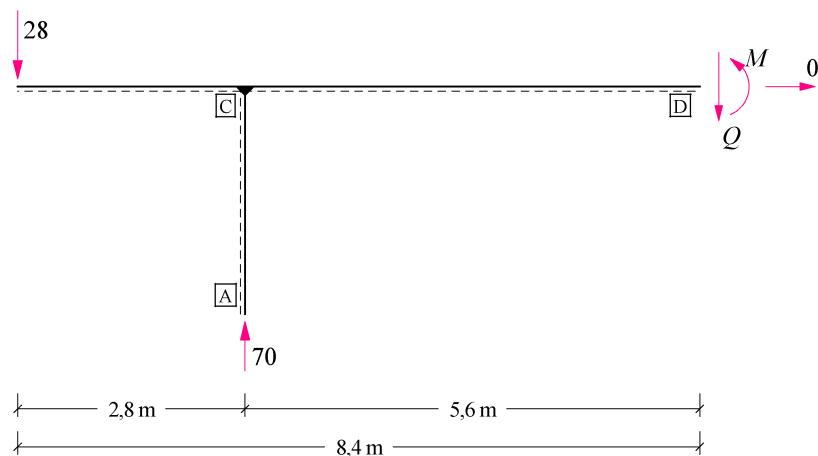
Schnitt III

Abb. 6-48 Schnitt III

$$\sum M^{(D)} = 0 : 28 \cdot 8,4 - 70 \cdot 5,6 + M = 0 \rightarrow M = +156,8 \text{ kNm}$$

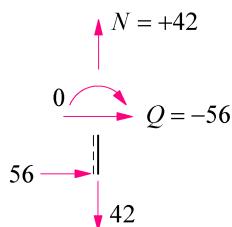
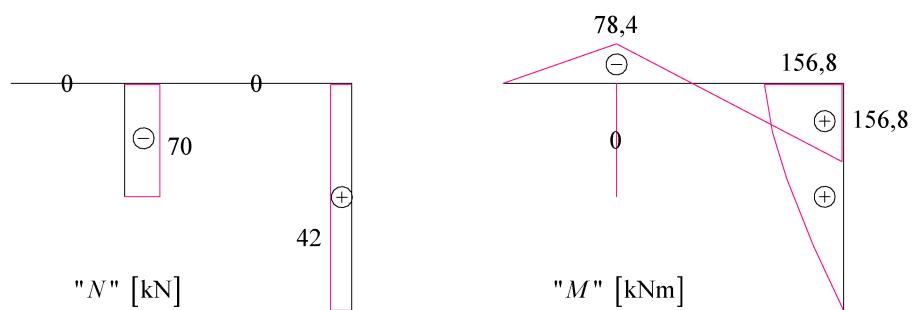
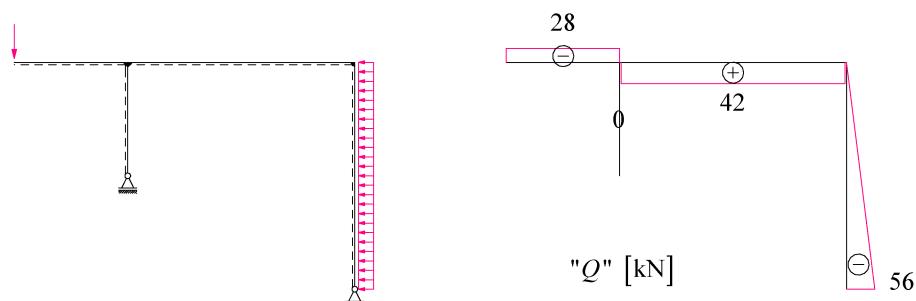
Schnitt IV

Abb. 6-49 Schnitt IV

Abb. 6-50 Zustandslinien N , Q und M

7 Einführung in die Vektorrechnung

Physikalische Größen, die durch ihren Betrag und ihre Richtung festgelegt sind, heißen Vektoren. Ein Vektor kann durch einen Pfeil geometrisch maßstäblich dargestellt werden. Als mathematische Symbole für Vektoren werden in dieser Lehrveranstaltung unterstrichene Buchstaben verwendet, zum Beispiel \underline{A} . Der Betrag des Vektors \underline{A} wird durch $|\underline{A}|$ oder kurz durch A (ohne Unterstreichung) angegeben. Ein Vektor mit dem Betrag Eins heißt *Einheitsvektor* \underline{e} .

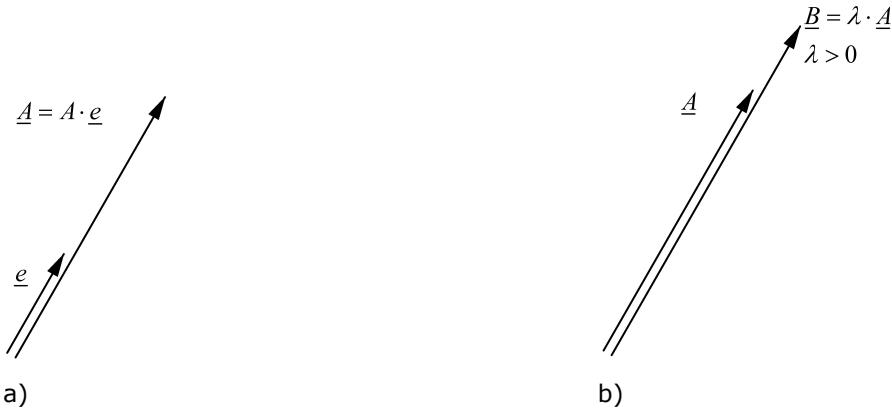


Abb. 7-1 Vektordarstellung

Jeder Vektor lässt sich als Produkt aus seinem Betrag und einem gleichgerichteten Einheitsvektor schreiben (Abb. 7-1a):

$$\underline{A} = A \cdot \underline{e} \quad (7.1)$$

Multipliziert man einen Vektor \underline{A} mit einer skalaren Größe λ , so erhält man den Vektor $\underline{B} = \lambda \cdot \underline{A}$ mit $|\underline{B}| = \lambda \cdot |\underline{A}|$ (Abb. 7-1b).

Die Addition zweier Vektoren \underline{A} und \underline{B} ergibt den *Summenvektor*

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \quad (7.1)$$

Der Summenvektor aus \underline{A} und \underline{B} (Abb. 7-2a) kann durch maßstäbliches Aneinanderzeichnen der Vektoren ermittelt werden wie in (Abb. 7-2b) gezeigt. Da die Reihenfolge der Addition keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, kann man auch ein Parallelogramm aus den beiden Vektoren wie in Abb. 7-2c zeichnen.

Wenn das Parallelogramm in Abb. 7-2c betrachtet wird, kann auch der Schluss gezogen werden, dass ein gegebener Vektor \underline{C} in zwei Vektoren \underline{A} und \underline{B} mit den vorgegebenen Wirkungslinien a und b zerlegt werden kann.

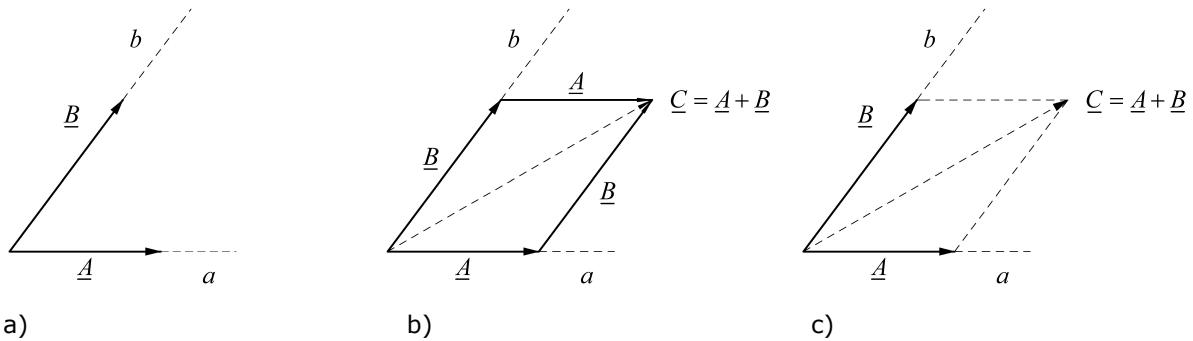


Abb. 7-2 Komponenten eines Vektors

Die Vektoren heißen dann *Komponenten* \underline{A} und \underline{B} des Vektors \underline{C} bezüglich der Richtungen a und b. In der Ebene ist die Zerlegung eines Vektors nach zwei verschiedenen Richtungen mit Hilfe des Parallelogramms eindeutig möglich. Entsprechend lässt sich im Raum die Zerlegung nach drei nicht in einer Ebene liegenden Richtungen eindeutig durchführen. Im Raum gelingt die grafische Zerlegung allerdings nicht.

Wir stellen Vektoren meistens in einem kartesischen Koordinatensystem dar, siehe Abb. 7-3. Die jeweils aufeinander senkrecht stehenden Achsrichtungen (orthogonale Achsen) x , y und z des Koordinatensystems werden durch die *Einheitsvektoren* \underline{e}_x , \underline{e}_y und \underline{e}_z gekennzeichnet.

Der Vektor \underline{A} kann in seine Komponenten \underline{A}_x , \underline{A}_y und \underline{A}_z bezüglich der drei Achsrichtungen zerlegt werden:

$$\underline{A} = \underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z \quad (7.2)$$

Nach (7.1) gilt für die *Komponenten*

$$\underline{A}_x = A_x \cdot \underline{e}_x \text{ bzw. } \underline{A}_y = A_y \cdot \underline{e}_y \text{ bzw. } \underline{A}_z = A_z \cdot \underline{e}_z \quad (7.3)$$

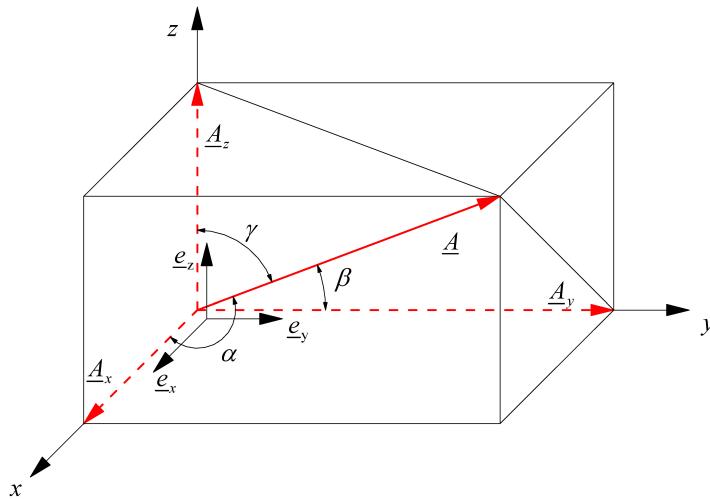


Abb. 7-3 Räumlicher Vektor

Damit wird aus (7.2)

$$\underline{A} = A_x \cdot \underline{e}_x + A_y \cdot \underline{e}_y + A_z \cdot \underline{e}_z \quad (7.4)$$

Die Maßzahlen A_x , A_y und A_z heißen *Koordinaten* oder *Komponenten* des Vektors \underline{A} . Ordnet man die Koordinaten in einer Spalte

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

an, so nennt man diese Darstellung von \underline{A} einen *Spaltenvektor*. Durch die Angaben seiner drei Koordinaten ist ein Vektor eindeutig bestimmt.

Wenn man Abb. 7-3 betrachtet, stellt man fest, dass der *Betrag* des Vektors aus dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann nach (7.6).

$$|\underline{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \rightarrow \quad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \rightarrow \quad \frac{A^2}{A^2} = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = 1 \quad (7.6)$$

Die Richtung von \underline{A} wird in Abb. 7-3 durch die Winkel α , β und γ charakterisiert:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}, \quad \cos \beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos \gamma = \frac{A_z}{A} \quad (7.7)$$

mit (7.6) ist

$$\frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2} = 1 \quad (7.8)$$

und es gilt daher

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (7.9)$$

Die drei Winkel α , β und γ sind also nicht unabhängig voneinander.

Im Folgenden werden einige *Rechenregeln* unter Verwendung der Komponentenschreibweise zusammengestellt.

7.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die *Multiplikation* eines Vektors \underline{A} mit einem Skalar λ (Abb. 7-1) liefert mit (7.2) und (7.3) den Vektor \underline{B} :

$$\underline{B} = \lambda \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \lambda = \lambda \cdot (\underline{A}_x + \underline{A}_y + \underline{A}_z) = \lambda \cdot A_x \cdot \underline{e}_x + \lambda \cdot A_y \cdot \underline{e}_y + \lambda \cdot A_z \cdot \underline{e}_z \quad (7.10)$$

Ein Vektor wird demnach mit einer Zahl multipliziert, indem jede Koordinate des Vektors mit dieser Zahl multipliziert wird. Für $\lambda > 0$ bleibt dabei der Richtungssinn erhalten, während er sich für $\lambda < 0$ umkehrt. Im Sonderfall $\lambda = -1$ erhält man den Vektor $\underline{B} = -\underline{A}$, der aus dem Vektor \underline{A} unter Beibehaltung des Betrages durch Umkehr des Richtungssinns entsteht. Für $\lambda = 0$ erhält man den *Nullvektor* $\underline{0}$.

7.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Für die Summe zweier Vektoren \underline{A} und \underline{B} (siehe Abb. 7-2) erhält man

$$\begin{aligned} \underline{C} = \underline{A} + \underline{B} &= (A_x \cdot \underline{e}_x + A_y \cdot \underline{e}_y + A_z \cdot \underline{e}_z) + (B_x \cdot \underline{e}_x + B_y \cdot \underline{e}_y + B_z \cdot \underline{e}_z) \\ &= (A_x + B_x) \cdot \underline{e}_x + (A_y + B_y) \cdot \underline{e}_y + (A_z + B_z) \cdot \underline{e}_z \\ &= C_x \cdot \underline{e}_x + C_y \cdot \underline{e}_y + C_z \cdot \underline{e}_z \end{aligned} \quad (7.11)$$

Daraus folgt

$$C_x = A_x + B_x, \quad C_y = A_y + B_y, \quad C_z = A_z + B_z \quad (7.12)$$

Zwei Vektoren werden also addiert, indem man jeweils die entsprechenden Koordinaten addiert.

Bei der Subtraktion zweier Vektoren folgt mit

$$\underline{C} = \underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B}) \quad (7.13)$$

für die Koordinaten

$$C_x = A_x - B_x, \quad C_y = A_y - B_y, \quad C_z = A_z - B_z \quad (7.14)$$

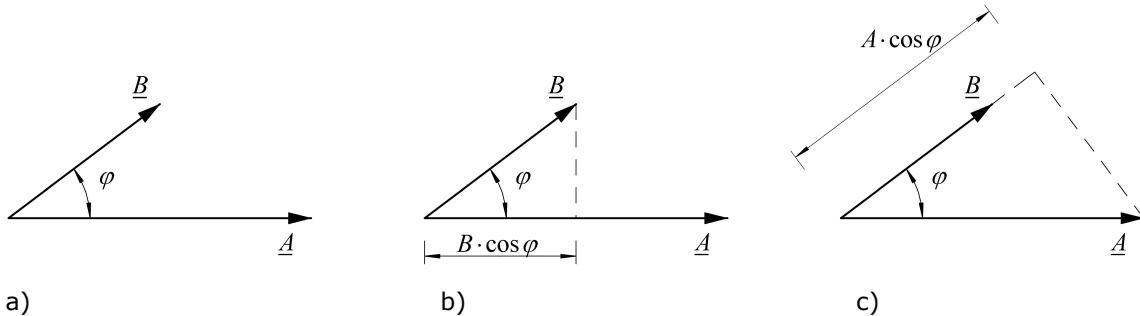
7.3 Skalarprodukt

Das *skalare Produkt* (inneres Produkt) zweier Vektoren \underline{A} und \underline{B} , die nach Abb. 7-4a den Winkel φ einschließen, ist definiert durch

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B \cdot \cos \varphi \quad (7.15)$$

Das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar (kein Vektor!). Das skalare Produkt lässt sich auf verschiedene Weise deuten (Abb. 7-4b):

- Betrag von \underline{A} mal Betrag von \underline{B} mal Kosinus des eingeschlossenen Winkels,
- Betrag von \underline{A} mal senkrechter Projektion von \underline{B} auf \underline{A} ,
- Betrag von \underline{B} mal senkrechter Projektion von \underline{A} auf \underline{B} .



Das Skalarprodukt ist positiv, wenn die beiden Vektoren einen spitzen Winkel einschließen, während es bei einem stumpfen Winkel negativ ist. Im Sonderfall orthogonaler Vektoren ($\varphi = \pi/2$) ist das Skalarprodukt Null.

Aus der Definition (7.15) folgt

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} \quad (7.16)$$

Die Reihenfolge der Vektoren darf beim skalaren Produkt vertauscht werden (Kommutativgesetz).

In Komponentendarstellung wird das Skalarprodukt geschrieben als

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_x \cdot \underline{e}_x + A_y \cdot \underline{e}_y + A_z \cdot \underline{e}_z) \cdot (B_x \cdot \underline{e}_x + B_y \cdot \underline{e}_y + B_z \cdot \underline{e}_z) \quad (7.17)$$

setzt man in (7.17) ein

$$\underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = \underline{e}_y \cdot \underline{e}_y = \underline{e}_z \cdot \underline{e}_z = 1 \text{ und } \underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = \underline{e}_y \cdot \underline{e}_z = \underline{e}_z \cdot \underline{e}_x = 0 \quad (7.18)$$

dann erhält man

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \quad (7.19)$$

Für den Sonderfall $\underline{B} = \underline{A}$ erhalten wir wegen $\varphi = 0$ aus (7.15)

$$\underline{A} \cdot \underline{A} = A^2 \text{ oder } A = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}} \quad (7.20)$$

7.4 Vektorprodukt

Beim *Vektorprodukt* (äußerer Produkt oder Kreuzprodukt) zweier Vektoren \underline{A} und \underline{B} verwenden wir ein "x" als Multiplikationszeichen:

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} \quad (7.21)$$

Das Produkt ist folgendermaßen definiert:

$$|\underline{C}| = C = A \cdot B \cdot \sin \varphi \quad (7.22)$$

- Der Vektor \underline{C} steht auf \underline{A} und \underline{B} senkrecht (Abb. 7-5).
- Der Betrag von \underline{C} ist gleich der von \underline{A} und \underline{B} aufgespannten Fläche, dabei ist φ der von \underline{A} und \underline{B} eingeschlossene Winkel.
- Die Vektoren \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (man kann Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand in dieser Reihenfolge mit den Richtungen von \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} zur Deckung bringen).

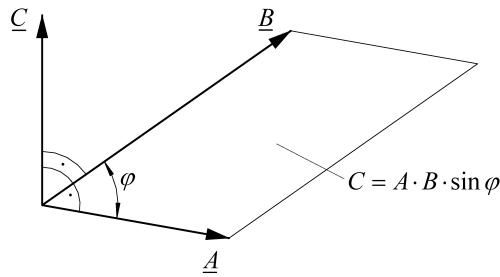


Abb. 7-5 Vektorprodukt

Daraus folgt

$$\underline{A} \times \underline{B} = -\underline{B} \times \underline{A} \quad (7.23)$$

Das Kommutativgesetz gilt für das Vektorprodukt nicht.

Sind zwei Vektoren parallel ($\varphi = 0$), so verschwindet ihr Vektorprodukt.

Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} \underline{e}_x \times \underline{e}_x &= \underline{0}, & \underline{e}_x \times \underline{e}_y &= \underline{e}_z, & \underline{e}_x \times \underline{e}_z &= -\underline{e}_y, \\ \underline{e}_y \times \underline{e}_x &= -\underline{e}_z, & \underline{e}_y \times \underline{e}_y &= \underline{0}, & \underline{e}_y \times \underline{e}_z &= \underline{e}_x, \\ \underline{e}_z \times \underline{e}_x &= \underline{e}_y, & \underline{e}_z \times \underline{e}_y &= -\underline{e}_x, & \underline{e}_z \times \underline{e}_z &= \underline{0} \end{aligned} \quad (7.24)$$

wird

$$\begin{aligned} \underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} &= (A_x \cdot \underline{e}_x + A_y \cdot \underline{e}_y + A_z \cdot \underline{e}_z) \times (B_x \cdot \underline{e}_x + B_y \cdot \underline{e}_y + B_z \cdot \underline{e}_z) \\ &= A_x \cdot B_x \cdot \underbrace{\underline{e}_x \times \underline{e}_x}_0 + A_y \cdot B_x \cdot \underbrace{\underline{e}_y \times \underline{e}_x}_{-\underline{e}_z} + A_z \cdot B_x \cdot \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{e}_x}_{\underline{e}_y} \\ &\quad + A_x \cdot B_y \cdot \underbrace{\underline{e}_x \times \underline{e}_y}_{\underline{e}_z} + A_y \cdot B_y \cdot \underbrace{\underline{e}_y \times \underline{e}_y}_0 + A_z \cdot B_y \cdot \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{e}_y}_{-\underline{e}_x} \\ &\quad + A_x \cdot B_z \cdot \underbrace{\underline{e}_x \times \underline{e}_z}_{-\underline{e}_y} + A_y \cdot B_z \cdot \underbrace{\underline{e}_y \times \underline{e}_z}_{\underline{e}_x} + A_z \cdot B_z \cdot \underbrace{\underline{e}_z \times \underline{e}_z}_0 \\ \underline{C} &= (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y) \cdot \underline{e}_x + (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z) \cdot \underline{e}_y + (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x) \cdot \underline{e}_z \end{aligned} \quad (7.25)$$

Damit folgen die Koordinaten des Vektors \underline{C} zu

$$\begin{aligned}\underline{C}_x &= A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y \\ \underline{C}_y &= A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z \\ \underline{C}_z &= A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x\end{aligned}\tag{7.26}$$

Das Vektorprodukt kann auch in Form einer Determinante

$$\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}\tag{7.27}$$

geschrieben werden. In der ersten Zeile stehen dabei die Einheitsvektoren $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$, während die Koordinaten der Vektoren \underline{A} und \underline{B} die zweite und die dritte Zeile bilden.

Stichwortverzeichnis

1-wertiges Lager.....	28	Komponenten eines Vektors	74
2-wertiges Lager.....	28	Koordinatensystem	
3-wertiges Lager.....	28	global.....	68
Balken.....	27	lokal	68
Bogen	27	Körper	
Differentialgleichung für N	49	deformierbarer	6
Differentialgleichungen für Q und M	50	starrer.....	6
Drehmoment.....	21	Kraft.....	5
Drehsinn	21	Kraftangriffspunkt.....	6
Einheitsvektor	73	Kräfte	5
Einheitsvektoren.....	74	Kräftegruppe	
Einspannung	28	ebene.....	9
Fachwerk		zentrale.....	9
Definition.....	39	Kraftsystem	
Knoten	39	ebenes	9
Knotenpunktverfahren	41	Kraftvektor	5
Nachweis statische Bestimmtheit.....	39	im kartesischen Koordinatensystem	6
Rittersches Schnittverfahren	44	Linienkraft	7
statisch bestimmt, Bildungsgesetze	40	Moment.....	21
Festlager	28	Momentengelenk	28
Flächenkräfte	7	Normalkraft	27
Gelenk	28	Nullstäbe.....	41
Gelenkträger	64	Regeln zum Erkennen.....	41
Reihenfolge der Berechnung	64	Nullvektor.....	75
Gleichgewicht.....	7	Quälerei	5
Ebene.....	13	Rahmen	27, 68
Raum	18	Resultierende	9, 22
Gleichgewichtsgruppe		resultierenden Moment.....	22
ebene.....	13	Rittersches Schnittverfahren	
Gleitlager.....	28	Vorgehen.....	44
Hebelarm.....	22	Schnittgrößen	27
kinematisch	28	Berechnung	47
Knoten	39	Definition der positiven	47
Knotenpunktverfahren	41	Extremwertberechnung.....	67
		Funktionsverlauf	48

gestrichelte Linie	47, 69	Betrag	74
Maximum	53	gebundener	5
mehrteilige Träger	64	Komponenten	74
N, Q, M	47	Koordinaten	74
positives/negatives Schnittufer	47	linienflüchtiger	7
Rahmen	68	Spaltenvektor	74
Steigung	53	Symbole	73
Unstetigkeitsstelle	48	Zerlegung	73
Zugfaser	47	Vektorprodukt	77
Schnittpunktprinzip		Vektorrechnung	
und Gleichgewicht	7	Addition und Subtraktion	75
Seil	27	Einführung	73
Skalarprodukt	76	eingeschlossener Winkel	77
Stab	27	Multiplikation mit Skalar	75
Stabkraft	27	Rechenregeln	75
statisch bestimmt	29	Skalarprodukt	76
statische Bestimmtheit		Vektorprodukt	77
mehrteilige Systeme	30	Volumenkräfte	7
Summenvektor	73	Wirkungslinie	6
Träger		Zugfaser	47
mehrteilige	64	Zustandslinien	52
Vektor		Zwangskräfte	7